T exp

Interrogation écrite du lundi 11 octobre 2021 (30 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….……………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

Quelle est la nature du nombre $\text{A}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}$? Justifier.

……………………………………………………………………………………….……………………

……………………………………………………………………………………….……………………

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On pose $E=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$.

1°) On choisit au hasard un entier x dans E.

• Quelle est la probabilité que $\dfrac{1}{x}$ soit un nombre décimal sachant que x est un nombre pair ? ……

• Quelle est la probabilité que x soit un nombre pair sachant que $\dfrac{1}{x}$ est un nombre décimal ? ……

2°) On considère l'application f définie sur E qui à tout entier $x\in E$ associe le chiffre des unités de l'écriture en base dix de x^2.

Par exemple, $f(8)=4$ car $8^2=64$ et le chiffre des unités de 64 est 4.

Quels sont les antécédents de 9 par f ? Répondre sans égalité et sans faire de phrase.

…………….

III. (2 points)

On considère la phrase P suivante où f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$P : « \ \forall x\in E \quad f(x)\neq 0 \ »$$

Écrire la négation de P : ………………………

IV. (3 points)

À tout nombre complexe z on fait correspondre le nombre $Z=z^2-\overline{z}^2$.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels.

Exprimer $\overline{z}$ en fonction de x et de y. …………………….. (une seule égalité)

Exprimer Z en fonction de x et de y.

…….

…….

V. (4 points : 2 points + 2 points)

On pose $z = 2\mathrm{i}x - 1 + x^2(1 - \mathrm{i})$ où x est un réel.

Recopier et compléter les égalités $\mathrm{Re}\, z = ...$ et $\mathrm{Im}\, z = ...$. ………........ ………........

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x le nombre z est un réel et pour quelle(s) valeur(s) de x le nombre z est un imaginaire pur.
On attend une démarche sous la forme d'une chaîne d'équivalences suivant le modèle donné en annexe.

…….

…….

…….

…….

VI. (4 points)

● Déterminer le nombre complexe z dont l'opposé du conjugué est égal à $1 + \mathrm{i}$.

…………….. (une seule égalité)

● Déterminer le nombre complexe z' dont l'inverse est égal à $1 + \mathrm{i}$.

…………….. (une seule égalité)

VII. (1 point)

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z + \mathrm{i}\overline{z'} = 0$.
Quelle égalité peut-on écrire ? Entourer la réponse exacte.

$z' = \mathrm{i}\overline{z}$ $\qquad$ $z' = \mathrm{i}z$ $\qquad$ $z' = -\mathrm{i}\overline{z}$ $\qquad$ $z' = -\mathrm{i}z$

Annexe

Rédaction et présentation pour l'exercice **V** (chaînes d'équivalences).

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ldots$	$z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \ldots$
$\Leftrightarrow \ldots$	$\Leftrightarrow \ldots$
$\Leftrightarrow \ldots$	$\Leftrightarrow \ldots$
$\Leftrightarrow \ldots$	$\Leftrightarrow \ldots$

Pas de phrase réponse.

Corrigé de l'interrogation écrite du 11-10-2021

I.

Quelle est la nature du nombre $\mathrm{A}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}$? Justifier.

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}\\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\times 6}}}\\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}}\\
&= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\times 5}}\\
&= \sqrt{1+2\sqrt{16}}\\
&= \sqrt{1+2\times 4}\\
&= \sqrt{9}\\
&= 3
\end{aligned}$$

A est un entier naturel.

II.

On pose $E=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$.

1°) On choisit au hasard un entier x dans E.

● Quelle est la probabilité que $\dfrac{1}{x}$ soit un nombre décimal sachant que x est un nombre pair ? $\dfrac{4}{5}$

● Quelle est la probabilité que x soit un nombre pair sachant que $\dfrac{1}{x}$ est un nombre décimal ? $\dfrac{2}{3}$

Il s'agit de probabilités conditionnelles.

L'univers des possibles de l'expérience aléatoire est E. On munit cet espace d'une probabilité uniforme P (on est dans un cas d'équiprobabilité, tous les éléments de E ont la même probabilité d'être tirés).

On peut tester chaque élément de E.

$\dfrac{1}{1}=1$ est un entier naturel donc un nombre décimal.

$\dfrac{1}{2}=0,5$ est un nombre décimal.

$\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

$\dfrac{1}{4}=0,25$ est un nombre décimal.

$\dfrac{1}{5}=0,2$ est un nombre décimal.

$\dfrac{1}{6}$ n'est pas un nombre décimal.

$\dfrac{1}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

$\dfrac{1}{8}=0,125$ est un nombre décimal.

$\dfrac{1}{9}$ n'est pas un nombre décimal.

$\dfrac{1}{10}=0,1$ est un nombre décimal.

● Probabilité que $\dfrac{1}{x}$ soit un nombre décimal sachant que x est un nombre pair :

Il y a 5 éléments pairs dans E (2, 4, 6, 8, 10) parmi lesquels 4 ont un inverse décimal (2, 4, 8, 10).

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{4}{5}$.

● Probabilité que x soit un nombre pair sachant que $\dfrac{1}{x}$ est un nombre décimal :

Il y a 6 éléments dans E dont l'inverse est un nombre décimal (1, 2, 4, 5, 8, 10) parmi lesquels 4 sont pairs (2, 4, 8, 10).

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

On pourrait noter A l'événement : « x est un nombre pair » et B l'événement : « $\dfrac{1}{x}$ est un nombre décimal ».

Dans le premier cas, on cherche $P\left(\mathrm{B}/\mathrm{A}\right)$ (probabilité de B sachant A).
Dans le deuxième cas, on cherche $P\left(\mathrm{A}/\mathrm{B}\right)$ (probabilité de A sachant B).

Il est déconseillé d'utiliser la formule $P\left(\mathrm{B}/\mathrm{A}\right)=\dfrac{P\left(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}\right)}{P\left(\mathrm{A}\right)}$ inutilement compliquée ici.

2°) On considère l'application f définie sur E qui à tout entier $x\in E$ associe le chiffre des unités de l'écriture en base dix de x^2.
Par exemple, $f\left(8\right)=4$ car $8^2=64$ et le chiffre des unités de 64 est 4.
Quels sont les antécédents de 9 par f ? Répondre sans égalité et sans faire de phrase.

3 ; 7

On cherche tous les carrés des éléments de E et on regarde ceux dont l'écriture en base dix se termine par 9.

III.

On considère la phrase P suivante où f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$P : « \ \forall x \in E \quad f(x) \neq 0 \ »$$

Écrire la négation de P : « $\exists x \in E$ tel que $f(x) = 0$ »

non P : « $\exists x \in E$ tel que $f(x) = 0$ »

IV.

À tout nombre complexe z on fait correspondre le nombre $Z = z^2 - \overline{z}^2$.
On pose $z = x + \text{i}y$ où x et y sont des réels.
Exprimer $\overline{z}$ en fonction de x et de y. $\overline{z} = x - \text{i}y$ (une seule égalité)
Exprimer Z en fonction de x et de y.

$$Z = z^2 - \overline{z}^2$$

$$= (x + \text{i}y)^2 - (x - \text{i}y)^2$$

$$= (x^2 - y^2 + 2\text{i}xy) - (x^2 - y^2 - 2\text{i}xy)$$ (on développe les deux identités remarquables)

$$= 4\text{i}xy$$

Autre méthode :

On utilise une factorisation : $Z = (z + \overline{z})(z - \overline{z})$.

On sait ensuite que $z + \overline{z} = 2x$ et $z - \overline{z} = 2\text{i}y$.

On remplace et on trouve $Z = 4\text{i}xy$ comme avec la méthode par développement.

On constate que Z est un imaginaire pur, ce que l'on aurait pu d'ailleurs démontrer directement en utilisant les conjugués ($\overline{Z} = -Z$).

V.

On pose $z = 2\text{i}x - 1 + x^2(1 - \text{i})$ où x est un réel.

Recopier et compléter les égalités $\text{Re}\, z = \ldots$ et $\text{Im}\, z = \ldots$. $\text{Re}\, z = x^2 - 1$ $\text{Im}\, z = 2x - x^2$

On écrit $z = x^2 - 1 + \text{i}(2x - x^2)$ qui est la forme algébrique de z.

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x le nombre z est un réel et pour quelle(s) valeur(s) de x le nombre z est un imaginaire pur.
On attend une démarche sous la forme d'une chaîne d'équivalences suivant le modèle donné en annexe.

$z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z=0$ (égalité essentielle pour commencer) $\Leftrightarrow 2x-x^2=0$ $\Leftrightarrow x(2-x)=0$ $\Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$	$z\in\mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re} z=0$ (égalité essentielle pour commencer) $\Leftrightarrow x^2-1=0$ $\Leftrightarrow x^2=1$ $\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

On n'écrit pas de phrase réponse.

VI.

● Déterminer le nombre complexe z dont l'opposé du conjugué est égal à $1+\mathrm{i}$.

$$z=\mathrm{i}-1 \quad \text{(une seule égalité)}$$

● Déterminer le nombre complexe z' dont l'inverse est égal à $1+\mathrm{i}$.

$$z'=\frac{1-\mathrm{i}}{2} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On répond en écriture algébrique (pas de i au dénominateur).

On a $-\overline{z}=1+\mathrm{i}$ donc $\overline{z}=-1-\mathrm{i}$ d'où $z=-1+\mathrm{i}$ soit $z=\mathrm{i}-1$.

On a $\dfrac{1}{z'}=1+\mathrm{i}$ donc $z'=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$ d'où $z'=\dfrac{1\times(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})\times(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1^2+1^2}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$.

VII.

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z+\mathrm{i}\overline{z'}=0$.
Quelle égalité peut-on écrire ? Entourer la réponse exacte.

$z'=\mathrm{i}\overline{z}$ $\qquad$ $z'=\mathrm{i}z$ $\qquad$ $z'=-\mathrm{i}\overline{z}$ $\qquad$ $z'=-\mathrm{i}z$

$$z'=-\mathrm{i}\overline{z}$$

On utilise l'égalité $z+\mathrm{i}\overline{z'}=0 \quad (1)$.

On ne passe pas en forme algébrique (complication inutile).

$$(1) \Leftrightarrow i\overline{z'} = -z$$

$$\Leftrightarrow \overline{z'} = -\frac{z}{i}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z'} = -\frac{z \times i}{i \times i}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z'} = -\frac{z \times i}{-1}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z'} = iz$$

$$\Leftrightarrow \overline{\overline{z'}} = \overline{iz}$$

$$\Leftrightarrow z' = \bar{i} \times \overline{z}$$

$$\Leftrightarrow z' = -i\overline{z}$$