T spécialité

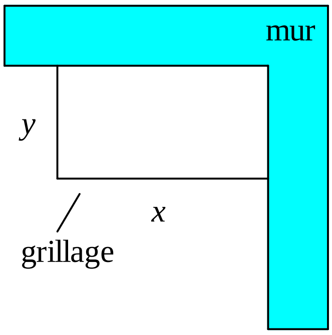
Interrogation écrite du vendredi 8 octobre 2021

Durée : 30 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….………………………………….

Note : ….. / 20

I. (2 points)



Jacques souhaite poser un grillage au fond de son jardin afin de créer un enclos rectangulaire pour ses poules comme l'indique la figure ci-contre.
Il possède 12 m de grillage.
On note x et y les longueurs en m indiquées sur la figure avec $x > y$.
Le but de l'exercice est de déterminer x et y sachant que l'enclos a une aire de 27 m².
Écrire deux égalités vérifiées par x et y.

……………. ……………

Compléter la phrase : « x et y sont solutions de l'équation …………………………………….. d'inconnue $X \in \mathbb{R}$ ».
En déduire x et y (résolution au brouillon). On écrira deux égalités.

……. …….

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère l'équation $(m-1)x^2 - 3mx + m + 1 = 0 \quad (\mathrm{E})$.

1°) Pour quelle valeur de m, 2 est-il solution de (E) ? Dans ce cas, (E) admet-elle une autre solution ?
Si oui, déterminer cette solution sans résoudre (E).

2°) On admet que, pour tout réel $m \neq 1$, (E) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, que l'on notera x' et x''.

On pose $S = (x')^2 \times x'' + x' \times (x'')^2$.
Exprimer S en fonction de m (sans calculer x' et x'').

1°) ………… (une seule égalité) …… (pas d'égalité) 2°) …………..……. (une seule égalité)

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points + 1 point)

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ de variable réelle x.

1°) Déterminer une racine de $P(x)$.

2°) En déduire une factorisation de $P(x)$ (méthode au choix) puis les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$.

1°) …. (une seule réponse sans égalité)

2°) …………………………………… (une seule égalité)

……………………… (répondre sans égalité)

Vérifier en résolvant l'équation $P(x) = 0$ à l'aide de la calculatrice.

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = ...$

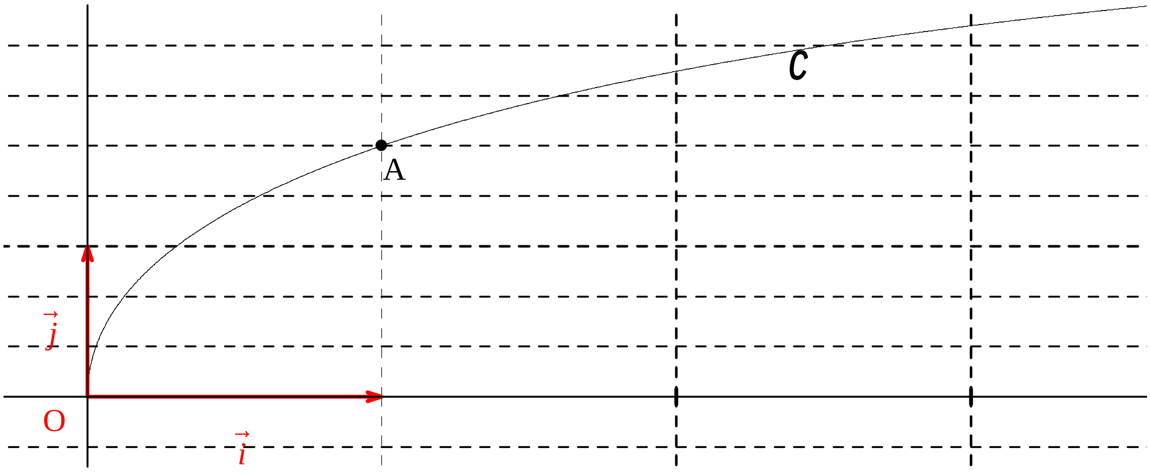
2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \mathrm{e}^x$. …… (écrire la ou les solutions sans égalité)

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - \dfrac{x}{3}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = ...$

2°) Calculer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1. ……
Tracer T sur le graphique ci-dessous.



3°) Déterminer l'abscisse du point B de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite D d'équation $y = \dfrac{x}{3}$.

……… (une seule égalité)

VI. (2 points)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne le point $\mathrm{A}(1\,;-2)$.

Calculer la distance OA. …………. (une seule égalité)

Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 3. ………………………………………………

Bonus sur 1 point à traiter sur une feuille à part :

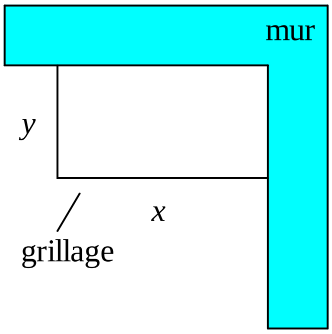
On considère le polynôme $P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-3000)$ de variable réelle x.

Quel est le degré de $P(x)$? Que vaut $P(2021)$? Quel est le signe de $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$?

Corrigé de l'interrogation écrite du 8-10-2021

I.

Jacques souhaite poser un grillage au fond de son jardin afin de créer un enclos rectangulaire pour ses poules comme l'indique la figure ci-contre.
Il possède 12 m de grillage.
On note x et y les longueurs en m indiquées sur la figure avec $x > y$.
Le but de l'exercice est de déterminer x et y sachant que l'enclos a une aire de 27 m².
Écrire deux égalités vérifiées par x et y.



$x + y = 12$ $\qquad\qquad$ $xy = 27$

Compléter la phrase : « x et y sont solutions de l'équation $X^2 - 12X + 27 = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$ ».

On applique directement la propriété du cours donnant l'équation du second degré vérifiée par deux nombres dont on connaît la somme et le produit.

En déduire x et y (résolution au brouillon). On écrira deux égalités.

$x = 9$ $\qquad\qquad$ $y = 3$

On résout l'équation grâce au discriminant réduit ou à la calculatrice.

On n'oublie pas la condition $x > y$.

On vérifie immédiatement que les valeurs trouvées vérifient les égalités $x + y = 12$ et $xy = 27$.

II.

On considère l'équation $(m-1)x^2 - 3mx + m + 1 = 0$ $\quad(\mathrm{E})$.

1°) Pour quelle valeur de m, 2 est-il solution de (E) ? Dans ce cas, (E) admet-elle une autre solution ?
Si oui, déterminer cette solution sans résoudre (E).

2°) On admet que, pour tout réel $m \neq 1$, (E) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, que l'on notera x' et x''.

On pose $S = (x')^2 \times x'' + x' \times (x'')^2$.
Exprimer S en fonction de m (sans calculer x' et x'').

1°) $m = -3$ (une seule égalité) $\qquad$ $\dfrac{1}{4}$ (pas d'égalité) $\qquad$ 2°) $S = \dfrac{3m(m+1)}{(m-1)^2}$ (une seule égalité)

1°) Pour que 2 soit solution de (E), il faut et il suffit que $(m-1) \times 2^2 - 3m \times 2 + m + 1 = 0$ $\quad(1)$.

$$\begin{aligned}
(1) \;&\Leftrightarrow\; 4(m-1) - 6m + m + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow\; 4m - 4 - 6m + m + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow\; -m - 3 = 0\\
&\Leftrightarrow\; m = -3
\end{aligned}$$

Pour $m = -3$, (E) s'écrit $(-3-1) \times x^2 - 3 \times (-3) \times x - 3 + 1 = 0$ soit $-4x^2 + 9x - 2 = 0$.

On sait que 2 est racine de (E).

Or le produit des racines est égal à $\dfrac{-2}{-4}=\dfrac{1}{2}$.

L'autre racine est donc égale à $\dfrac{1}{4}$.

2°) On factorise S pour faire apparaître le produit et la somme des racines de (E).

$S=x'x''(x'+x'')$

Par les formules de la somme et du produit des racines d'une équation du second degré, on sait que $x'+x''=\dfrac{3m}{m-1}$ et $x'x''=\dfrac{m+1}{m-1}$ (on observe que $m-1\neq 0$ puisque $m\neq 1$ par hypothèse).

$S=\dfrac{m+1}{m-1}\times\dfrac{3m}{m-1}$

$=\dfrac{3m(m+1)}{(m-1)^2}$ (inutile de développer le numérateur)

III.

On considère le polynôme $P(x)=2x^3-3x^2-17x+30$ de variable réelle *x*.

1°) Déterminer une racine de $P(x)$.

2°) En déduire une factorisation de $P(x)$ (méthode au choix) puis les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$.

1°) 2 (une seule réponse sans égalité)

2°) $P(x)=(x-2)\left(2x^2+x-15\right)$ (une seule égalité)

2 ; -3 ; $\dfrac{5}{2}$ (répondre sans égalité)

Comme 2 est racine de $P(x)$, on sait que $P(x)$ peut se factoriser par $x-2$.

On peut dire que $P(x)=(x-2)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme du second degré.

La factorisation s'obtient grâce à la méthode des coefficients indéterminés ou à la méthode de division euclidienne de polynômes.

On peut même éventuellement trouver $Q(x)$ par simple calcul mental.

En posant $Q(x)=ax^2+bx+c$ où *a*, *b*, *c* sont trois réels, *a* étant non nul, on obtient :

$(x-2)Q(x)=(x-2)\left(ax^2+bx+c\right)=\ldots=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$.

Par identification, on obtient un système linéaire de 4 équations à 3 inconnues.

On cherche les racines réelles du polynôme $2x^2+x-15$ grâce au discriminant (qui vaut $1+4\times 15\times 2=121$) ou à la calculatrice. Ces racines sont $x_1=\dfrac{-1+11}{4}=\dfrac{5}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1-11}{4}=-3$.

Autre méthode possible :

1°) – 3 (une seule réponse sans égalité)

2°) $P(x)=(x+3)\left(2x^2-9x+10\right)$ (une seule égalité)

Vérifier en résolvant l'équation $P(x)=0$ à l'aide de la calculatrice.

IV.

On considère la fonction $f: x\mapsto \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$. $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\dfrac{3\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$

Il s'agit d'une fonction de la forme $\dfrac{k}{u}$. On effectue la réécriture $f(x)=3\times\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ plus commode pour la dérivation.

On pose $u(x)=1+\mathrm{e}^{-x}$.

On a donc $\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)=(-1)\times\mathrm{e}^{-x}$ soit $\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ (avec la formule $\left(\mathrm{e}^{ax}\right)'=a\mathrm{e}^{ax}$ où a est une constante).

On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=3\times\left[-\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}\right]$ ce qui donne $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\dfrac{3\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\mathrm{e}^x$. ln 2 (écrire la ou les solutions sans égalité)

On résout l'équation $f(x)=\mathrm{e}^x$ (1) dans $\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\mathrm{e}^x\\
&\Leftrightarrow 3=\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \quad \text{(produit en croix)}\\
&\Leftrightarrow 3=\mathrm{e}^x+1\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^x=2\\
&\Leftrightarrow x=\ln 2
\end{aligned}
$$

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - \dfrac{x}{3}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3}$

On n'arrange pas le résultat (pas utile pour les questions suivantes).

L'expression s'obtient grâce à la réécriture $f(x) = 2 \times \sqrt{x} - \dfrac{1}{3} \times x$ qui donne $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3} \times 1$ d'où le résultat.

2°) Calculer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

$\dfrac{2}{3}$

Tracer T sur le graphique ci-dessous.

On sait que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse $a > 0$ est égal à $f'(a)$.

On calcule donc $f'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{1}} - \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

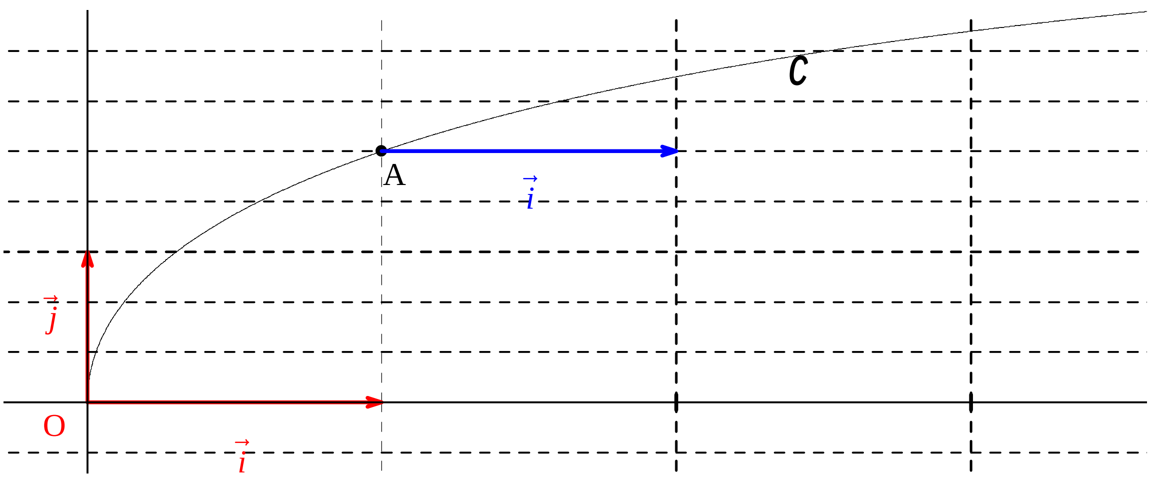
On sait que le vecteur $\vec{u}\left(1\,;\dfrac{2}{3}\right)$ est un vecteur directeur de T. (résultat fondamental pour une droite de coefficient directeur m : $\vec{u}(1\,;m)$ est un vecteur directeur).
On construit facilement un représentant d'origine A de ce vecteur.

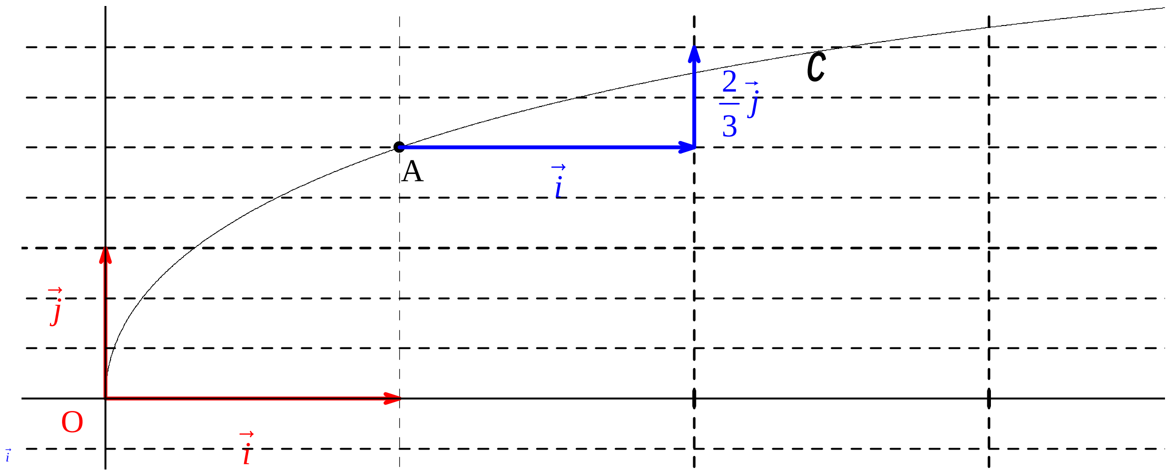
On peut aussi dire que le vecteur $3\vec{u}(3\,;2)$ est un vecteur directeur de la droite T.
Ce vecteur a l'avantage d'avoir des coordonnées entières mais il n'est pas possible de le construire sur le graphique car la fenêtre utilisée est trop petite.

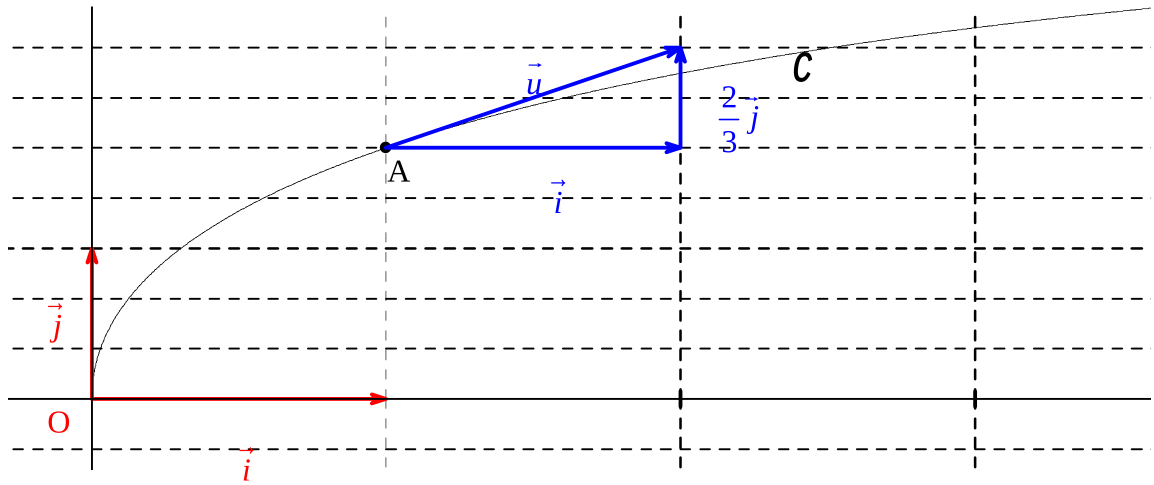
On constate graphiquement que T coupe l'axe des ordonnées au point $\mathrm{B}(0\,;1)$.

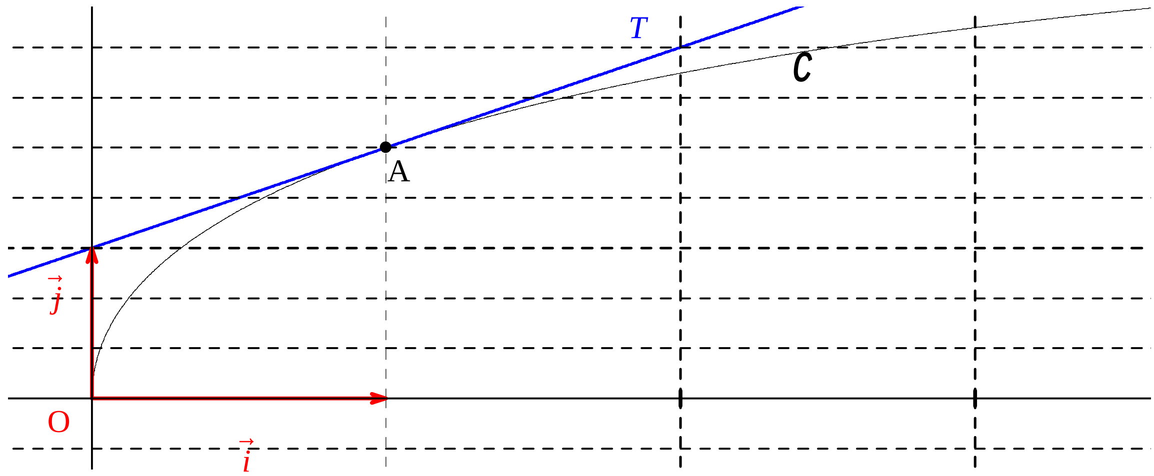
Il n'y a pas besoin d'une équation de T pour effectuer le tracé.

$\vec{u}\left(1\,;\dfrac{2}{3}\right)$ donc $\vec{u} = \vec{i} + \dfrac{2}{3}\vec{j}$ (décomposition du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ des vecteurs du plan). On utilise cette égalité vectorielle pour construire le vecteur $\vec{u}$.









3°) Déterminer l'abscisse du point B de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite D d'équation $y=\frac{x}{3}$.

$$x_{\mathrm{B}}=\frac{9}{16} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On sait que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse $a>0$ est égal à $f'(a)$.

On cherche donc les réels a strictement positifs tels que $f'(a)=\frac{1}{3}$ $\quad(1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}=\frac{3}{2} \quad \text{(passage à l'inverse de chacun des deux membres)}$$

$$\Leftrightarrow a=\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{9}{4}$$

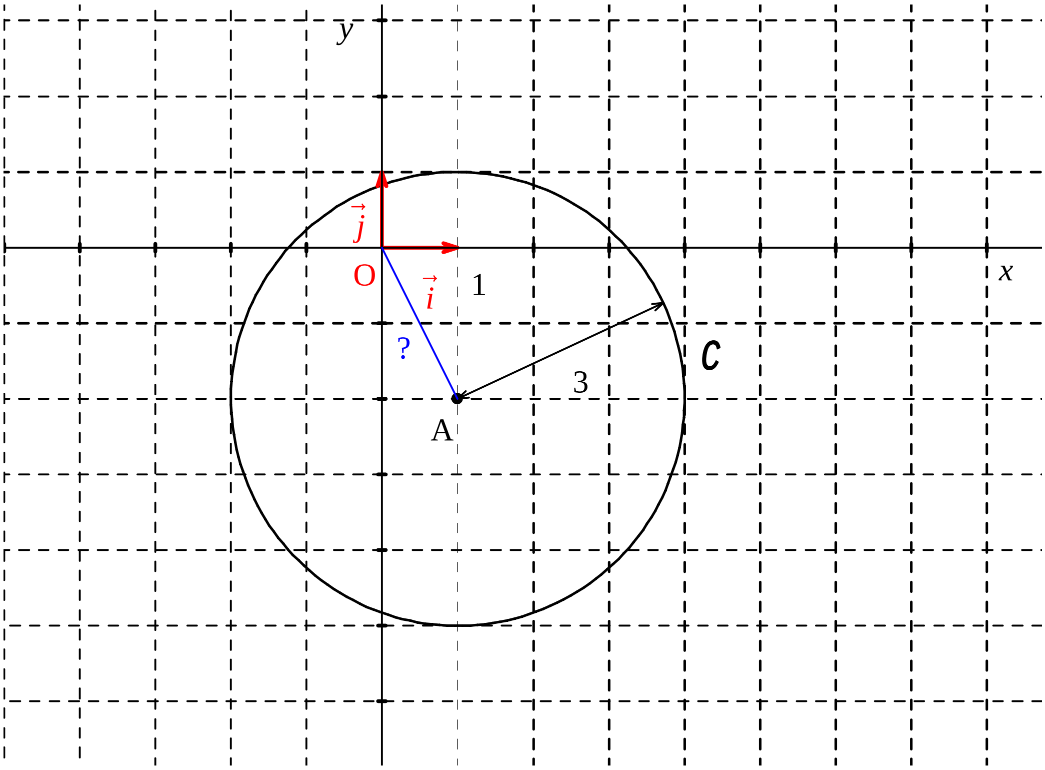
On vérifie la résolution de l'équation $\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ grâce à la calculatrice.

VI.

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne le point $\mathrm{A}\left(1\,;-2\right)$.

Calculer la distance OA. $\mathrm{OA}=\sqrt{5}$ (une seule égalité)

Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 3. $(x-1)^2+(x+2)^2=9$



Comme le repère est orthonormé et que O est l'origine du repère, on peut directement utiliser la formule du carré de la distance d'un point à l'origine du repère (« Le carré de la distance d'un point à l'origine du repère est égal à la somme des carrés des coordonnées »).

Il s'agit d'un cas particulier de la formule donnant la distance entre deux points U et V dans un repère orthonormé : $\mathrm{UV}=\sqrt{\left(x_{\mathrm{U}}-x_{\mathrm{V}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{U}}-y_{\mathrm{V}}\right)^2}$ qui est la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{UV}}$ (ou du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{VU}}$).

$$\mathrm{OA}^2={x_{\mathrm{A}}}^2+{y_{\mathrm{A}}}^2=1^2+(-2)^2=5 \text{ d'où } \mathrm{OA}=\sqrt{5}$$

On peut retrouver directement le résultat sur le graphique en appliquant le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle ou le résultat sur la longueur des diagonales d'un rectangle de côtés *a* et *b* (en fait, on redémontre la formule).

On applique directement la formule donnant une équation du cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon R :

$(x-a)^2+(x-b)^2=R^2$ [ou $\sqrt{(x-a)^2+(x-b)^2}=R$].

$\mathcal{C}$ a pour équation $(x-1)^2+(x-(-2))^2=3^2$ soit $(x-1)^2+(x+2)^2=9$.

On n'est pas obligé de développer.

Bonus sur 1 point à traiter sur une feuille à part :

On considère le polynôme $P(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-3000)$ de variable réelle *x*.

Quel est le degré de $P(x)$? Que vaut $P(2021)$? Quel est le signe de $P\left(\frac{1}{2}\right)$?

$\deg P(x)=3001$

Après avoir multiplié les *x* entre eux, on obtiendra x^{3001}.
Le monôme de plus haut degré dans l'écriture développée réduite de $P(x)$ est donc x^{3001}.

$P(2021)=0$

On a $P(2021)=2021(2021-1)(2021-2)(2021-3)...(2021-3000)$.
L'un des facteurs est $2021-2021$ qui fait 0 donc le produit est égal à 0.

$P\left(\frac{1}{2}\right)$ est strictement positif.

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)...\left(\frac{1}{2}-3000\right)$

Le premier facteur est strictement positif.
Tous les autres facteurs sont strictement négatifs.
Les facteurs strictement négatifs sont au nombre de 3000.
Comme c'est un nombre pair, d'après la règle des signes d'un produit, le résultat sera strictement négatif.

On peut aussi faire un tableau de signes.
Les valeurs charnières sont 0, 1, 2, …, 3000.
On donne le signe le plus à droite : + évident pour tout $x>3000$.
Ensuite, on a une alternance de signes.