T experts

Devoir pour le mardi 5 octobre 2021

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………….………………………………

Note : ….. / 20

Le but de ce devoir est de déterminer toutes les manières d'écrire le nombre 2021 comme somme d'entiers relatifs consécutifs.

1°) Soit *a* et *b* deux entiers relatifs tels que $a < b$. On note *I* l'intervalle d'entiers $[\![a\,;b]\!]$ et on désigne par $S(I)$ la somme des éléments de *I*.
Exprimer $S(I)$ en fonction de *a* et *b*. (formule explicite sans utiliser le symbole Σ).

……………………………………… (une seule égalité)

2°) À l'aide du site *dcode*, déterminer *a* et *b* tels que $S(I)=2021$. Écrire toutes les possibilités trouvées.

………

………

………

3°) a) Écrire 2021 comme produit de deux entiers naturels distincts de 1.
Que peut-on dire de ces deux entiers ?

………

………

b) Expliquer (par des phrases uniquement) comment retrouver par le calcul le résultat de la question 2°).
On ne demande pas de détailler les calculs. On pourra se contenter de les effectuer au brouillon.

………

………

………

………

Indication :

1°) Écrire une formule sous forme d’un quotient avec numérateur sous la forme d’un produit.

Corrigé du devoir pour le 5-10-2021

1°)

On peut écrire $S(I)=\sum_{k=a}^{k=b} k$.

Les éléments de *I* pris dans l'ordre croissant forment une suite arithmétique de raison 1 donc on peut appliquer directement la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.
On sait que le nombre d'éléments de *I* est égal à $b-a+1$.

On en déduit que $S(I)=\dfrac{(b-a+1)(a+b)}{2}$.

Autre idée :

Pour *a* et *b* entiers naturels, $S(I)=\sum_{k=0}^{k=b} k-\sum_{k=0}^{k=a-1} k$.

On peut démontrer que la formule obtenue est la même que celle en développant.

On obtient une formule valable également pour *a* et *b* entiers relatifs quelconques.

La démonstration nécessite de faire des cas.

La formule sera également moins exploitable dans la suite.

2°) Avec dcode, on obtient les couples $(-2020\,;2021)$, $(-1009\,;1011)$, $(-25\,;68)$, $(-19\,;66)$, $(20\,;66)$, $(26\,;68)$, $(1010\,;1011)$.

3°) a) Il existe une seule manière d'écrire 2021 comme produit de deux entiers naturels distincts de 1 à l'ordre près des facteurs : $2021=43\times47$.
Les entiers 43 et 47 sont des nombres premiers.

b) Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a<b$.

On pose $x=a+b$ et $y=b-a+1$.

On cherche a et b tels que $\dfrac{xy}{2}=2021$ soit $xy=2\times2021$

$xy=2\times43\times47$

On se réfère au manière d'écrire 2×2021 comme produit de deux entiers naturels.

$\begin{cases}x=43\\y=2\times47\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\times43\\y=47\end{cases}$ $\begin{cases}x=47\\y=2\times43\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\times47\\y=43\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=43\times47\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=43\times47\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=2\times43\times47\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\times43\times47\\y=1\end{cases}$

On retrouve les résultats fournis par dcode.