T exp

Interrogation écrite du lundi 27 septembre 2021 (45 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (1 point)

On considère la proposition P : « Il existe un irrationnel strictement positif x tel que $\ln x$ soit un entier naturel ».
P est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

………

II. (5 points : 4 points + 1 point)

On pose $a = 4 - \sqrt[3]{2}$, $b = 1 + 2\mathrm{e}^{-\ln 6}$, $c = 19,2 \times \sqrt[3]{1000} + \sqrt{25}$, $d = 1 - 10^{-23}$.
Déterminer pour chacun des nombres s'il s'agit d'un entier relatif, d'un nombre décimal non entier, d'un nombre rationnel non décimal ou d'un nombre irrationnel. Répondre sans justifier (une phrase par ligne du type : « a est un … »).
Écrire le(s) entier(s) naturel(s) en base onze, en notant 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α les chiffres dans cette base.

………

………

………

………

………

………

III. (2 points)

On pose $x = 3{,}15\underline{15}\ldots$.
Déterminer l'écriture fractionnaire de x. Donner le résultat en fraction irréductible. ……………
(une seule égalité)

IV. (2 points)

Soit P et Q deux propositions. Écrire la réciproque et la contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$.

réciproque : …………… contraposée : ……………

On suppose que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie. Parmi la réciproque et la contraposée, laquelle est vraie ?

………………………………………………… (ne pas justifier)

Toujours avec l'hypothèse « $P \Rightarrow Q$ est vraie », compléter les phrases suivantes par « condition nécessaire » et « condition suffisante ».

P est une ……………………………… pour Q. Q est une ……………………………… pour P.

V. (2 points)

………………………………………………

On pose $\mathrm{A} = 3n^2 - 1$ et $\mathrm{B} = n - 2$ où n est un entier relatif quelconque.
Écrire une combinaison linéaire de A et B à coefficients entiers relatifs dont le résultat est un entier relatif non nul indépendant de n.

(une seule égalité)

VI. (2 points)

……………………………………………………

On pose $\mathrm{A} = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$.
Écrire le sous-ensemble B des éléments de A dont l'inverse est un nombre décimal. On écrira une seule égalité sous la forme $\mathrm{B} = \{...\}$.

VII. (2 points)

Recopier et compléter sur la ligne ci-dessous, pour a et b entiers relatifs, l'équivalence : « $ab = -2 \Leftrightarrow$ … ».

………

VIII. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

On se propose de démontrer dans cet exercice que pour tout entier naturel n non nul le nombre $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier. Pour cela, on raisonne par l'absurde.

On fixe un entier naturel n non nul et l'on suppose que $\sqrt{n^2+1}$ est un entier. On pose alors $p = \sqrt{n^2+1}$ (1).

1°) Justifier que $p > n$.

2°) En élevant au carré les deux membres de l'égalité (1) et en transposant n^2 dans le membre de gauche, on obtient $p^2 - n^2 = 1$ soit $(p+n)(p-n) = 1$ (2). Conclure en utilisant l'égalité (2).

………

………

………

………

………

Corrigé de l'interrogation écrite du 27-9-2021

I.

On considère la proposition P : « Il existe un irrationnel strictement positif x tel que $\ln x$ soit un entier naturel ».
P est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

P est vraie : e est un nombre irrationnel (strictement positif) et on a $\ln \mathrm{e} = 1$ qui est un entier naturel.

Tous les nombres de la forme e^n avec n entier naturel conviennent également.

II.

On pose $a = 4 - \sqrt[3]{2}$, $b = 1 + 2\mathrm{e}^{-\ln 6}$, $c = 19,2 \times \sqrt[3]{1000} + \sqrt{25}$, $d = 1 - 10^{-23}$.
Déterminer pour chacun des nombres s'il s'agit d'un entier relatif, d'un nombre décimal non entier, d'un nombre rationnel non décimal ou d'un nombre irrationnel. Répondre sans justifier (une phrase par ligne du type : « a est un … »).
Écrire le(s) entier(s) naturel(s) en base onze, en notant 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α les chiffres dans cette base.

On donne les valeurs exactes de a, b, c, d lorsque c'est possible.

a est un nombre irrationnel car c'est la différence entre un nombre rationnel et un nombre irrationnel.
On sait que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Le début du développement décimal de a obtenu grâce à la calculatrice ne permet pas donner la nature de a.

On a $b = 1 + 2 \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 6}} = 1 + \frac{2}{6} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ (on obtient la valeur exacte de b).
b est donc un nombre rationnel non décimal.

$c = 19,2 \times 10 + 5 = 192 + 5 = 197$ donc c est un nombre entier naturel.

d est un nombre décimal (différence de deux décimaux) et ce n'est pas un entier.

On sait que $10^{-23} = 0,00...01$ (le chiffre 1 est le 23$^{\mathrm{e}}$ chiffre après la virgule).

On en déduit (par « logique », sans calculatrice) que $d = 0,99...9$ (le chiffre 9 étant répété 23 fois).

Attention, il y a bien un nombre fini de 9 après la virgule.

On va chercher l'écriture en base onze de c.
On effectue la méthode des divisions euclidiennes successives (on a écrit ci-dessous les divisions en ligne).

$197 = 11 \times 17 + 10$

$17 = 11 \times 1 + 6$

$1 = 11 \times 0 + 1$

On a donc $c=\overline{16\alpha}^{(11)}$.

On peut écrire $c=1\times 11^2+6\times 11^1+10\times 10^0$.

III.

$x=\dfrac{104}{33}$

On pose $x=3{,}15\underline{15}\dots$.
Déterminer l'écriture fractionnaire de *x*. Donner le résultat en fraction irréductible. (une seule égalité)

On peut dire que *x* est un nombre rationnel car les décimales sont périodiques.

On calcule $100x-x$. On obtient $99x=312$ d'où $x=\dfrac{312}{99}$ ce qui donne, en simplifiant, $x=\dfrac{104}{33}$.

IV.

Soit *P* et *Q* deux propositions. Écrire la réciproque et la contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$.

réciproque : $Q \Rightarrow P$ contraposée : non $Q \Rightarrow$ non P

On suppose que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie. Parmi la réciproque et la contraposée, laquelle est vraie ?

la contraposée (ne pas justifier)

Toujours avec l'hypothèse « $P \Rightarrow Q$ est vraie », compléter les phrases par « condition nécessaire » et « condition suffisante ».

P est une condition suffisante pour *Q*. *Q* est une condition nécessaire pour *P*.

Pour que *Q* soit vraie, il suffit que *P* soit vraie.

Pour que *P* soit vraie, il est nécessaire que *Q* soit vraie.

V.

$\mathrm{A}-3(n+2)\mathrm{B}=11$

On pose $\mathrm{A}=3n^2-1$ et $\mathrm{B}=n-2$ où *n* est un entier relatif quelconque.
Écrire une combinaison linéaire de A et B à coefficients entiers relatifs dont le résultat est un entier relatif non nul indépendant de *n*. (une seule égalité)

On observe que $(n-2)(n+2)=n^2-4$ soit $(n+2)\mathrm{B}=n^2-4$.
Il est facile ensuite de trouver une combinaison linéaire de A et B qui satisfasse les conditions (coefficients entiers relatifs, résultat non nul indépendant de *n*).

VI.

On pose $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Écrire le sous-ensemble B des éléments de A dont l'inverse est un nombre décimal. On écrira une seule égalité sous la forme $B=\{...\}$.

$B=\{1;2;4;5;8;10\}$

On teste les éléments de A un à un ou on applique la propriété sur les quotients qui sont des décimaux (dénominateurs de la forme $2^\alpha\times5^\beta$ avec α et β entiers naturels).

On peut écrire :

- $A=[\![1;10]\!]$ avec la notation d'intervalle d'entiers ;
- $B=\left\{x\in A\ /\ \dfrac{1}{x}\in\mathbb{D}\right\}$.

VII.

Recopier et compléter sur la ligne ci-dessous, pour a et b entiers relatifs, l'équivalence : « $ab=-2 \Leftrightarrow \ldots$ ».

$$ab=-2 \Leftrightarrow (a=1 \text{ et } b=-2) \text{ ou } (a=-2 \text{ et } b=1) \text{ ou } (a=-1 \text{ et } b=2) \text{ ou } (a=2 \text{ et } b=-1)$$

VIII.

On se propose de démontrer dans cet exercice que pour tout entier naturel n non nul le nombre $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier. Pour cela, on raisonne par l'absurde.

On fixe un entier naturel n non nul et l'on suppose que $\sqrt{n^2+1}$ est un entier. On pose alors $p=\sqrt{n^2+1}$ (1).

1°) Justifier que $p>n$.

2°) En élevant au carré les deux membres de l'égalité (1) et en transposant n^2 dans le membre de gauche, on obtient $p^2-n^2=1$ soit $(p+n)(p-n)=1$ (2). Conclure en utilisant l'égalité (2).

1°)

On raisonne par inégalités successives.

On a $1>0$ donc $n^2+1>n^2$ en additionnant n^2 aux deux membres de l'inégalité.

Comme les deux membres sont positifs ou nuls, on peut « passer à la racine carrée ».

On a donc $\sqrt{n^2+1}>\sqrt{n^2}$.

Or n est un entier naturel donc n est positif (même strictement positif car n est non nul).

Par conséquent, $\sqrt{n^2}=n$.

On en déduit que $\sqrt{n^2+1}>n$ soit $p>n$.

2°) La seule manière d'écrire 1 comme produit de deux entiers naturels est 1×1.

On n'utilise pas d'équivalences dans cette question.

On utilise l'égalité (2).

Comme $p>n$, $p-n$ est un entier naturel strictement positif.

$p+n$ est aussi un entier naturel.

On a donc $p-n=1$ et $p+n=1$.

En soustrayant ces deux inégalités membre à membre (la deuxième – la première), on obtient $2n=0$ soit $n=0$.

Or on a supposé que *n* est non nul donc on en déduit que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.