1ère S3	**Interrogation écrite du mercredi 30 septembre 2009**	**Note : ……/20**

Durée : 30 minutes **Prénom et nom : ……………………………….**

Travail sans calculatrice avec brouillon.
Compléter cette feuille très lisiblement <u>sans rature</u> !

I. (6 points) Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

1°) Démontrer que f admet un extremum global sur $\mathbb{R}$. On conclura ainsi :

« Le maximum/ minimum de f sur $\mathbb{R}$ est égal à ……… ; il est obtenu pour $x =$ …. ».

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) Déterminer un minorant de f sur $\mathbb{R}$.

On conclura ainsi : « … est un minorant de f sur $\mathbb{R}$ ».

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3°) La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$? Justifier brièvement.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

II. (2 points) Donner la forme canonique du polynôme $P(x) = -2x^2 + 6x + 5$.
Faire les calculs au brouillon.

……………………………………………………………………………………

III. (3 points) On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto (x-3)^2$.

1°) Parmi les propositions suivantes entourer celle(s) qui est (sont) juste(s) pour tous les réels x tels que les deux membres existent.

$g(x) = f(x) - 3$	$g(x) = f(3-x)$	$g(x) = f(x+3)$	$g(x) = f(x-3)$

2°) On note $\mathcal{C}$ et Γ les courbes représentatives respectives de f et g dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Compléter la phrase ci-dessous en utilisant le vocabulaire adapté :
On passe de la courbe $\mathcal{C}$ à la courbe Γ par ……………………………………..

…………………………………………………………………………………..…

IV. (2 points) Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note Γ la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$. On note $\mathcal{C}$ l'image de Γ par la translation de vecteur $\vec{u} = 2\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$. Compléter directement la phrase ci-dessous :

La courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y =$ ....

V. (4 points) On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
Variations de f		↗	4	↘	0	↘	-2	↗	

On donne de plus $f(5) = -1$.
Aucune justification n'est demandée dans cet exercice. Ne pas faire de phrase.

1°) Donner le signe de $f(x)$ pour $x \in]1\,;5]$.	
2°) On considère la phrase : « Si $x > 5$, alors $f(x) > -1$ ». Cette phrase est-elle vraie ou fausse ?	
3°) Donner le signe de $f(x) - 4$ pour $x \in]-\infty\,;3]$.	
4°) Soit *g* la fonction définie par $g(x)$ est l'image de $x + 4$ par *f*. Donner les images de – 4 et de 1 par *g*.	

VI. (1 point) Soit *a* et *b* deux réels non nuls distincts.

L'expression $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$ est égale à (entourer la ou les bonnes réponses) :

$a - b$	$b - a$	$\dfrac{ab}{a-b}$	$\dfrac{ab}{b-a}$	$\dfrac{b-a}{ab}$	$\dfrac{a-b}{ab}$

VII. (2 points) Soit *f* et *g* les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$ et $g(x) = 2 - x^2$.
Compléter l'égalité (donner l'expression sous forme développée).

Pour tout réel *x*, on a : $(f \circ g)(x) =$ ....

Bonus (traiter l'une des questions au choix)

Dans les deux premiers bonus, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On demande de compléter la phrase.

① On passe de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = 4x^2$ à la courbe $\mathcal{C}\,'$ d'équation $y = (2x+1)^2 - 3$ par ....
Donner le calcul algébrique permettant de justifier le résultat (sans trop détailler les calculs).

....

② On passe de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = (2x+1)^2$ à la courbe $\mathcal{C}\,'$ d'équation $y = (2x-1)^2$ par ....
Donner le calcul algébrique permettant de justifier le résultat (sans trop détailler les calculs).
....

③ On considère la fonction $f : x \mapsto \left|\,|x| - 1\,\right|$.

Exprimer $f(x)$ en fonction de *x* sans barres de valeurs absolues pour $x < -1$.

....

Corrigé de l'interrogation écrite du 30-9-2009

I. f est la fonction définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

1°) Démontrons que f admet un extremum global sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant 0$

$+\ 1$

$x^2 + 1 \geqslant 1$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1$

$f(x) \leqslant 1$

1 est un majorant de f sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer que 1 est le maximum global de f sur $\mathbb{R}$, **il suffit** de donner un nombre dont l'image par f soit égale à 1.

On écrit directement : $f(0) = 1$.

Donc le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est égal à 1 ; il est obtenu pour $x = 0$.

2°) Déterminons un minorant de f sur $\mathbb{R}$.

De manière évidente, on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$

Donc 0 est un minorant de f sur $\mathbb{R}$.

3°) D'après les questions 1°) et 2°), $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < f(x) \leqslant 1$.

On en déduit que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

II. Forme canonique du polynôme $P(x) = -2x^2 + 6x + 5$.

$$P(x) = -2\left(\underbrace{x^2 - 3x} - \frac{5}{2}\right)$$

$$P(x) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{5}{2}\right]$$

(le x^2 est « absorbé » dans le carré de $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$)

$$P(x) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{10}{4}\right]$$

$$P(x) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{4}\right] \quad \text{(forme finale acceptée)}$$

$$P(x) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{2}$$

Forme canonique (car du type $a(x-\alpha)^2 + \beta$)

Il s'agit d'égalités valables pour tout réel x donc d'égalités quantifiées implicitement (la quantification est sous-jacente).

Faux :

$P(x) = -2x(x+3) + 5$

$P(x) = -x(2x-6) + 5$

$P(x) = -2\left(x^2 - 3x - \dfrac{5}{2}\right)$

$P(x) = 2x(-x+3) + 5$

ne sont pas des formes canoniques.

III. $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto (x-3)^2$

1°) Il y a deux réponses possibles : $g(x) = f(3-x)$; $g(x) = f(x-3)$.

Explications :

$$g(x) = (x-3)^2 = f(x-3)$$

Pour tout réel *X*, on a : $(-X)^2 = X^2$; on applique le résultat avec $X = x-3$.

On a donc : $g(x) = (-x+3)^2 = (3-x)^2 = f(3-x)$.

2°) On passe de la courbe $\mathcal{C}$ à la courbe Γ par la translation de vecteur $3\vec{i}$.

IV. On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

On note g la fonction représentée par la courbe $\mathcal{C}$.

Comme $\mathcal{C}$ est l'image de Γ par la translation de vecteur $\vec{u} = 2(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$,

on peut écrire que $g(x) = f(x-2) + 2$ (on peut dire qu'on a exprimé $g(x)$ à l'aide de f en utilisant la translation).

(symétrie axiale possible, mais non justifiable par calcul avec une propriété du cours, si le repère est orthogonal)

Expression explicite de *g* en tenant compte du fait que *f* est la fonction inverse (difficulté substitution et le passage au calcul algébrique) :

$$g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$$

On conclut en disant :

La courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = \dfrac{1}{x-2} + 2$.

V.

1°) $\forall x \in]1\,;5]\quad f(x) < 0$

2°) La phrase : « Si $x > 5$, alors $f(x) > -1$ » est vraie.

En effet, la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $]5\,;+\infty[$ et $f(5) = -1$.

3°) D'après le tableau de variations, le maximum de *f* sur l'intervalle $]-\infty\,;3]$ est égal à 4.

Donc $\forall x \in]-\infty\,;3]\quad f(x) \leqslant 4$.

On obtient alors : $\forall x \in]-\infty\,;3]\quad f(x) - 4 \leqslant 0$.

4°) *g* est la fonction définie par $g(x)$ est l'image de $x+4$ par *f*.

Donc $g(x) = f(x+4)$ (expression de *g* à l'aide de *f*).

$$g(-4) = f(0) = 4$$

$$g(1) = f(5) = -1$$

VI. Une seule réponse juste :

$$\frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b-a}{ab}} = \frac{ab}{b-a}$$

Erreur grave (faite par beaucoup d'élèves) :

$$\frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} - \frac{1}{\frac{1}{b}} = a - b$$

VII. $f(x)=x-x^2$; $g(x)=2-x^2$

Pour tout réel *x*, on a :

$(f\circ g)(x)=f(X)$ avec $X=g(x)$

$(f\circ g)(x)=X-X^2$

$(f\circ g)(x)=(2-x^2)-(2-x^2)^2$

$(f\circ g)(x)=2-x^2-(4-4x^2+x^4)$

$(f\circ g)(x)=2-x^2-4+4x^2-x^4$

$\boxed{(f\circ g)(x)=-x^4+3x^2-2}$

Bonus

① On passe de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=4x^2$ à la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $y=(2x+1)^2-3$ par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{i}-3\vec{j}$.

Calcul algébrique permettant de justifier le résultat :

$$y=(2x+1)^2-3=\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2-3=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-3$$

② On passe de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=(2x+1)^2$ à la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $y=(2x-1)^2$ par la translation de vecteur $-\vec{i}$.

Calcul algébrique permettant de justifier le résultat :

$y=(2x-1)^2=\left[2(x-1)+1\right]^2$

Autre possibilité :

On passe de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=(2x+1)^2$ à la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $y=(2x-1)^2$ par la symétrie d'axe (O*y*).

Donner le calcul algébrique permettant de justifier le résultat (sans trop détailler les calculs).

$y=(2x-1)^2=(-2x+1)^2=\left[2(-x)+1\right]^2$

③ $f : x\mapsto \big||x|-1\big|$

Exprimer $f(x)$ en fonction de *x* sans barres de valeurs absolues pour $x<-1$.

$x<-1$ donc *x* est négatif d'où $|x|=-x$.

$f(x)=|-x-1|$

$x<-1$ donc $-x-1>0$

Par suite, on a : $f(x)=-x-1$.