T
experts

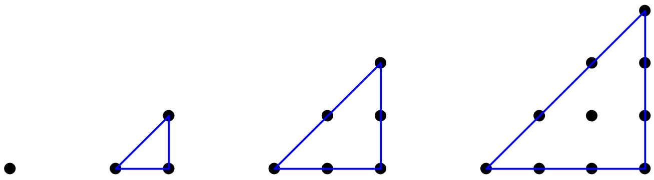
Devoir pour le vendredi 24 septembre 2021

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………….……………………………….

Note : ….. / 20

Dans l'Antiquité, les mathématiciens grecs se sont intéressés à des familles de nombres formant des figures polygonales. Il s'agit de « nombres polygonaux » : triangulaires, carrés, pentagonaux, etc.
Les figures ci-dessous décrivent le procédé de construction des nombres triangulaires, générant ainsi une suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$.



1 point	3 points	6 points	10 points
$t_1 = 1$	$t_2 = 3$	$t_3 = 6$	$t_4 = 10$

1°) Préciser la valeur de t_5. …………… (une seule égalité)

2°) Soit n un entier naturel non nul.
Écrire t_n sous la forme d'une somme (on pourra, sans caractère d'obligation, utiliser le symbole Σ). En déduire une « formule » explicite de t_n en fonction de n.

……………………………………. ……………………..…

3°) Quel est le plus grand nombre triangulaire inférieur ou égal à 2021 ? ……………..

Quel est le plus petit nombre triangulaire supérieur ou égal à 2021 ? ……………..

4°) En 1638, le mathématicien français Pierre de Fermat énonça le résultat suivant :
« Tout entier naturel non nul peut s'écrire comme la somme d'au plus trois nombres triangulaires ».
La démonstration en fut donnée en 1796 par le mathématicien allemand Friedrich Gauss.
Par exemple, on peut écrire $8 = t_1 + t_1 + t_3$, $9 = t_2 + t_3$, $11 = t_1 + t_4$, $14 = t_1 + t_2 + t_4$.
On parle dans chaque cas d'une décomposition en somme de nombres triangulaires.
On se propose de vérifier cette propriété dans des cas particuliers.

Proposer une décomposition en somme d'au plus trois nombres triangulaires de 25 et de 33.
Écrire une égalité dans chaque cas.

……………………………...... ……………………………......

Utiliser le site mathafou.free.fr rubrique « Décomposition en somme de trois nombres triangulaire » pour déterminer les décompositions possibles de 2021 comme somme d'au plus trois nombres triangulaires (à l'ordre près des termes). Écrire les égalités au verso.

Corrigé du devoir pour le 24-9-2021

1°)

$t_5 = 15$ (on effectue la figure avec les points ; on obtient 15 points)

2°)

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad t_n = 1+2+3+...+n$ ou $t_n = \sum_{k=1}^{k=n} k$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (formule donnant la somme des entiers naturels jusqu'à n)

On peut aussi reconnaître la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

On peut noter que la formule $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ peut se retrouver visuellement en utilisant précisément les points formant les nombres triangulaires (« preuve sans paroles »).

3°) $t_{63} = 2016$; $t_{64} = 2080$

4°)

$25 = 10+15 = t_4 + t_5$ ou $25 = t_1 + t_2 + t_6$

$33 = 6+6+21 = t_3 + t_3 + t_6$ ou $33 = 3+15+15 = t_2 + t_5 + t_5$

$2021 = 10+120+1891 = t_4 + t_{15} + t_{61}$
$2021 = 1+190+1830 = t_1 + t_{19} + t_{60}$
$2021 = 55+136+1830 = t_{10} + t_{16} + t_{60}$
$2021 = 10+300+1711 = t_4 + t_{24} + t_{58}$
$2021 = 120+190+1711 = t_{15} + t_{19} + t_{58}$
$2021 = 55+741+1225 = t_{10} + t_{38} + t_{49}$
$2021 = 300+496+1225 = t_{24} + t_{31} + t_{49}$
$2021 = 190+703+1128 = t_{19} + t_{37} + t_{47}$
$2021 = 120+820+1081 = t_{15} + t_{40} + t_{46}$