JEAN-PAUL DELAHAYE

PYTHAGORE À LA PLAGE

LES NOMBRES DANS UN TRANSAT

DUNOD

Crédits iconographiques
Toute omission qui nous serait signalée se verra rectifiée dans le prochain tirage.
P. 7 : © akg-images /Rabatti & Domingie. **P. 11** : © akg-images / Science Source.
P. 115 : KarocksOrkav / CC BY-SA 3.0 / Wikimedia.

Principe de collection, conception
et illustration de la couverture : Marie Sourd, Atelier AAAAA
Crédits typographiques : *Grotesque6* © Emilie Rigaud,
A is for (titraille) & *Carrara* © Hoftype (texte courant)
Illustrations de l'intérieur : Rachid Maraï

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-081752-8

PROLOGUE

PYTHAGORE, LE « PÈRE » DE LA SCIENCE MODERNE ?

Comme vous sans doute, j'ai découvert, étonné et émerveillé, le théorème de Pythagore au collège : dans un triangle rectangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés. En guise d'illustration, le manuel reproduisait l'image d'un homme à la longue barbe habillé d'une toge ; son air à la fois profond et sévère semblait m'inviter à poursuivre mon exploration.

Mais qui était Pythagore ? A-t-il vraiment découvert le théorème qu'on lui attribue ? Rien n'est moins sûr ; et qu'il l'ait découvert ou non, son héritage est loin de s'y limiter. Quand Pythagore s'attelle à l'étude des nombres et de leurs rapports, au VIe siècle avant notre ère, il ne cherche pas à résoudre de simples problèmes géométriques, mais à révéler l'harmonie de l'univers.

Pour lui, les nombres entiers sont la réalité première du cosmos. Une conception nouvelle de la science naît avec ce personnage énigmatique et ses fidèles disciples qui, des siècles durant, porteront sa parole et diffuseront ses messages. Plus de 2 500 ans plus tard, nous portons toujours en nous, sans le savoir, la plupart de ces messages ; et d'ailleurs, de nombreux thèmes abordés par l'école pythagoricienne sont aujourd'hui encore l'objet de recherche en arithmétique.

Nous allons découvrir et explorer ensemble ce monde des idées abstraites, en abandonnant rapidement les interrogations strictement historiques pour parcourir d'autres sujets – à la fois sérieux et récréatifs – nés de cette nouvelle façon d'envisager les nombres et les figures géométriques qu'on appelle les *mathématiques*.

Nous verrons que le raisonnement logique a des pouvoirs extraordinaires. Il permet notamment de parler de l'infini avec certitude, conduisant par exemple à savoir qu'il y a une infinité de nombres premiers, ou encore que dans l'infini de toutes les fractions faites avec deux entiers n/m, aucune n'a un carré égal à 2. Selon la légende, ce résultat, que l'on appelle aujourd'hui l'*irrationalité* de $\sqrt{2}$, fut considéré comme scandaleux par Pythagore et les membres de son école, qui espéraient décrire le monde à l'aide de nombres entiers. Après sa découverte, les humains se feront bon gré, mal gré à une nouvelle idée : à côté du monde physique – celui que nous expérimentons tous les jours –, il y en a un autre dont nous ne choisissons pas les lois – celui des nombres, des espaces géométriques et des structures abstraites. Nous les découvrons par le raisonnement et le travail mathématique, et les connaître nous aide à comprendre l'univers.

Depuis Pythagore, ce monde extraordinaire a suscité la curiosité d'une foule sans cesse croissante de visiteurs. Ces derniers y ont découvert des paysages d'une variété et d'une beauté imprévues. Leurs récits de voyage – les livres de mathématiques – se comptent maintenant par milliers. Bien évidemment, le périple guidé que vous offre ce petit ouvrage ne vous emmènera que dans quelques-unes de ces contrées, choisies pour leur élégance et l'accessibilité des raisonnements qu'il faut maîtriser pour s'y promener. D'un chapitre à l'autre, vous ferez connaissance avec – ou retrouverez – les nombres premiers et leur comète de Goldbach ; vous explorerez la suite de Fibonacci et admirerez son esthétique forme fractale ; vous vous exercerez à comprendre des démonstrations sans mots, grâce auxquelles une vérité inattendue se révèle par un simple regard attentif ; vous vous amuserez à vérifier la loi de Benford, qui fixe une étrange probabilité sur les nombres du quotidien et aide à lutter contre les fraudes ; vous aurez le vertige devant les exigeants nombres transcendants qui, après vingt siècles d'hésitations et de piétinements, ont livré le secret de la quadrature du cercle ; etc.

En avant pour notre croisière imaginaire en pays mathématique… allongé sur un transat !

CHAPITRE 1

PYTHAGORE, SON ÉCOLE ET SON THÉORÈME

Au VIe siècle avant notre ère, Pythagore est le maître d'une école qui considère que les nombres entiers sont partout et nous donnent les clés de l'univers. Le fameux théorème qui porte son nom – et qu'il n'est sans doute pas le premier à avoir formulé – établit un lien profond entre nombres et géométrie. Mais comment démontre-t-on ce théorème ? Est-il vrai dans tout espace géométrique, et en particulier est-il vrai dans notre espace physique ?

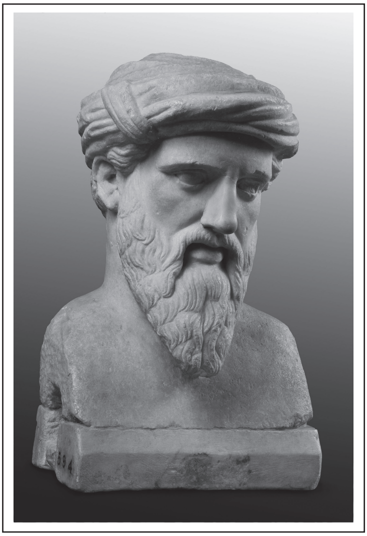
PYTHAGORE ET SES DISCIPLES

Pythagore est un personnage mystérieux qui ne nous a laissé aucun texte. On ne connaît sa vie que par des récits contradictoires, souvent écrits bien après sa mort – principalement ceux de Diogène Laërce (début du IIIe siècle), de Porphyre de Tyr (234-310) et de Jamblique (250-330). Nous ne nous étendrons donc pas sur les détails de sa biographie, sujet incertain, et n'en présenterons que les éléments essentiels.

Pythagore a vécu au VIe siècle et au tout début du Ve siècle avant notre ère. Il serait né dans l'île grecque de Samos, à quelques kilomètres des côtes de la Turquie actuelle. Le nom de Pythagore, *Pyth-agoras*, signifie « celui qui a été annoncé par la Pythie », car son père, lors d'un voyage à Delphes, aurait été averti de sa naissance prochaine par l'oracle du temple d'Apollon.

Dans sa jeunesse, Pythagore aurait longuement voyagé ; il se serait en particulier rendu en Égypte et en Crète. Ses biographes s'accordent pour indiquer qu'il avait déjà acquis une solide réputation de sagesse et d'érudition quand il se fixa avec quelques disciples à Crotone, à l'extrême sud de la botte italienne, vers 530 avant notre ère. C'est là qu'il fonda sa première école et enseigna, entre autres, que les nombres entiers jouent un rôle central dans l'univers. On pense que Pythagore est mort à Métaponte, au nord de Crotone, à l'âge d'environ 85 ans. Voilà pour les grandes lignes.

La légende attribue à Pythagore des pouvoirs extraordinaires. Il devine la quantité de poissons que vont ramener les filets des pêcheurs. Il maîtrise et calme l'ours de la Daunia (une région de la côte adriatique) qui importunait et menaçait les habitants dans les environs de sa tanière. Il ordonne à un aigle de descendre vers lui. Il affirme qu'il entend l'harmonie des sphères célestes. Il défend la métempsychose – croyance selon laquelle une même âme peut animer successivement plusieurs corps – et prétend savoir quelles furent ses vies antérieures. Il annonce une révolution à Crotone, guérit par la musique ou encore commande la pluie et le vent, etc.



Sculpture gréco-romaine, sans doute imaginaire, représentant Pythagore

S'ajoutant à celle des disciples de Crotone, d'autres communautés pythagoriciennes furent créées dans plusieurs villes grecques. Ces communautés, ouvertes aussi bien aux hommes qu'aux femmes, s'organisaient selon des règles de vie précises et impérieuses. Les membres partageaient leurs biens et maintenaient le plus

« Puisque les nombres étaient pour eux la réalité première du Cosmos, les pythagoriciens considéraient que les nombres étaient à la base de toute chose. »

Aristote (384-322 avant notre ère), *La Métaphysique*

souvent le secret sur l'enseignement que donnait le maître. Tous considéraient comme un devoir de se soutenir les uns les autres, quel qu'en soit le prix. Un fonctionnement qui, selon nos conceptions actuelles, s'apparente plus à celui d'une secte qu'à celui d'une école !

Dans certaines cités, les pythagoriciens jouèrent un rôle politique. Ils ne manquèrent pas de susciter de l'hostilité et déclenchèrent même des révoltes durant le Vᵉ siècle. On évoque un incendie criminel, à Crotone, qui fit périr un nombre important des disciples de Pythagore. Cependant, les idées du Maître furent préservées et développées par des individus isolés qui continuèrent à défendre la doctrine de l'école et diffusèrent sa vision du monde.

Une école néopythagoricienne se constitua à Rome et à Alexandrie au Iᵉʳ siècle avant notre ère et perdura pendant presque cinq cents ans. Elle fut parfois concurrente du christianisme, alors en plein essor. À travers ses enseignements, la figure tutélaire de Pythagore se mua en être divin, et ce courant fut à l'origine de nombreux récits plus ou moins fantastiques concernant la vie du sage.

Le prestige de Pythagore n'a jamais fléchi. L'historien et géographe Hérodote (480-425 avant notre ère), plusieurs décennies après sa mort, le considérait déjà comme l'un des plus grands esprits de la Grèce. Et au début du XIXe siècle, le célèbre philosophe allemand Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) affirmait que Pythagore était « le premier maître universel ».

« TOUT EST NOMBRE »

Selon la conception philosophique pythagoricienne, tout dans le monde repose sur les nombres, qu'elle limitait aux entiers positifs tels que 1, 2, 3, etc. D'autres philosophies anciennes se sont appuyées sur les nombres ; par exemple, en Inde, les nombres servirent à formuler toutes sortes d'explications qu'aujourd'hui nous considérons comme plus proches de la numérologie (une pratique ésotérique empreinte de mysticisme) que de la science. À l'opposé de ces philosophies, Pythagore n'ajoute pas de considérations mythologiques à son idée centrale qu'il faut penser le monde en s'appuyant sur les nombres. Cette façon de lier le monde et sa compréhension à des idées abstraites et mathématiques est le fondement même de la physique telle que nous la concevons désormais. En particulier, Archimède (287-212 avant notre ère) puis Galilée (1564-1642), en la mettant en œuvre, ont réussi à en tirer des lois simples, utiles et empiriquement vérifiées.

Plus généralement, l'idée pythagoricienne s'applique à la science dans son entier, et elle est toujours à l'œuvre

> « C'est aux Grecs que revient l'honneur d'avoir [...] tenté de démonter les rouages de l'univers sans autre désir que de mieux admirer leur beauté. »
>
> Jean Dieudonné, 1951

aujourd'hui quand les chercheurs et les ingénieurs modélisent les objets et les espaces en les assimilant à des structures mathématiques. La croyance au pouvoir explicatif des nombres, quand elle n'est pas accompagnée de procédures matérielles de validation, mène aux illusions de la numérologie ; mais quand elle est associée à un esprit critique et à des échanges contradictoires, elle est le moteur même des progrès de la science moderne – une science dont Pythagore serait ainsi le fondateur.

L'absence de textes de la main même du philosophe rend impossible la reconstitution précise des connaissances mathématiques de Pythagore. C'est pourquoi, à partir de maintenant, nous allons évoquer plusieurs thèmes sans chercher à savoir s'ils ont été développés par Pythagore ou par d'autres que lui.

La « musique » des nombres

D'après la légende, peu avant sa mort, Pythagore recommanda vivement à ses disciples d'étudier la musique, notamment l'instrument parfois appelé *canon de Pythagore*. Cet instrument ne possède qu'une seule corde, tendue au-dessus d'une caisse de résonance. Un chevalet mobile permet de faire varier la longueur de la partie utile de la corde ; en la pinçant, le musicien produit donc des notes de hauteurs variées.

Pythagore aurait ainsi fait une découverte majeure : deux notes jouées ensemble « sonnent » agréablement lorsque le rapport des longueurs des cordes qui les produisent peut s'écrire comme un rapport simple entre nombres entiers. C'est le cas de l'octave (rapport 2/1), de la quinte (3/2) et de la quarte (4/3). Ces rapports ne font intervenir que les quatre premiers nombres entiers, qui sont ceux de la fameuse *tétraktys* (voir p. 40). Pour les pythagoriciens, cette découverte confirmait que les nombres entiers et leurs rapports sont la clé de l'harmonie du cosmos.

Pythagore étudiant l'harmonie musicale (gravure issue d'un traité de la fin du xv^e siècle)

Depuis, l'étude de la musique est devenue indissociable de celle des nombres. Aujourd'hui, la plupart des traités musicaux reprennent la théorie pythagoricienne et la complètent, souvent en introduisant de nouvelles notions. La gamme tempérée que l'on doit au mathématicien flamand Simon Stevin (1548-1620), largement adoptée aujourd'hui, fait ainsi intervenir des racines douzièmes du nombre 2, qui étaient inconnues de Pythagore.

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

Commençons par le fameux *théorème de Pythagore* que tout le monde connaît depuis le collège :

« Le carré de la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés. »

Il est souvent associé à un autre résultat géométrique, le *théorème de Thalès* :

« Dans un plan où est dessiné un triangle, une droite parallèle à l'un des côtés définit avec les droites des deux autres côtés un triangle semblable au premier ».

Ce sont les deux premiers énoncés mathématiques qu'on peut considérer comme des *théorèmes* : ils ne sont pas évidents et permettent la résolution d'une multitude de questions différentes. Ils constituent en outre les bases sur lesquelles toute la géométrie usuelle se construit.

Ayons conscience cependant que leurs noms constituent plus des conventions pratiques qu'une attribution historique établie. Pour le théorème de Thalès (que les

Anglais dénomment *intercept theorem* et les Allemands *Strahlensatz,* c'est-à-dire « théorème des rayons »), la plus ancienne démonstration qu'on en connaît se trouve dans les *Éléments* d'Euclide, un traité rédigé vers 300 avant notre ère, et donc bien postérieur à Thalès de Milet, qui vécut entre 625 et 547 avant notre ère environ. Rien ne rattache clairement le théorème au savant grec, sauf l'exploit qu'il aurait accompli en calculant la hauteur d'une pyramide à partir de la mesure de son ombre, à l'aide d'une relation de proportionnalité entre deux triangles semblables.

Quant au théorème de Pythagore, là encore, il est impossible de soutenir que celui qui lui donne son nom en fut le découvreur. Les Babyloniens connaissaient ce théorème : des traces en figurent de manière certaine sur plusieurs tablettes d'argile précédant Pythagore d'un bon millénaire. Les savants babyloniens s'en servaient pour résoudre des problèmes variés qu'ils semblaient pratiquer comme des jeux. Ils n'ont pas formulé d'énoncés précis affirmant une propriété des triangles rectangles, mais une règle pratique (un algorithme, dirions-nous aujourd'hui) qui, appliquée avec soin, permet de passer de la connaissance des longueurs des côtés d'un triangle rectangle à la longueur de son hypoténuse.

Comme pour le théorème de Thalès, la première démonstration connue se trouve dans les *Éléments* d'Euclide, et est donc postérieure à Pythagore de deux siècles.

Cette démonstration est extrêmement ingénieuse et exploite la connaissance, considérée comme évidente, des formules donnant l'aire d'un triangle et l'aire d'un rectangle.

Le beau raisonnement d'Euclide repose sur le dessin d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse a pour longueur c et dont les deux autres côtés ont pour longueurs a et b. Sur les côtés du triangle sont dessinés trois carrés. Il montre alors que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse, c^2, est la somme des aires des deux carrés construits sur les autres côtés, $a^2 + b^2$.

Démonstration du théorème de Pythagore par Euclide

On rappelle les formules donnant l'aire d'un triangle :

$$T = (\text{hauteur} \times \text{base})/2,$$

et l'aire d'un rectangle :

$$R = \text{largeur} \times \text{longueur}.$$

La moitié de l'aire du rectangle BJRG est égale à l'aire du triangle OGB (voir les formules données plus haut), qui est la même que l'aire du triangle FAB (car FBA s'obtient en faisant tourner OGB d'un angle droit), qui est la moitié de l'aire du carré EOBF. Donc le rectangle BJRG et le carré EOBF ont la même aire. De la même façon, le rectangle JAHR et le carré CDAO ont la même aire.

On en tire par addition que l'aire du carré BAHG est égale à la somme des aires des carrés EOBF et CDAO. C'est ce que nous voulions démontrer : $a^2 + b^2 = c^2$.