T spé Exercices sur le second degré (révisions)

1 Déterminer dans chacun des cas suivants, sans utiliser de formules, la forme canonique de $f(x)$:

1°) $f : x \mapsto x^2-6x+1$; 2°) $f : x \mapsto 4x-x^2$; 3°) $f : x \mapsto x^2-x+2$; 4°) $f : x \mapsto 3x^2-6x-5$.
Vérifier en utilisant le site dcode.

2 Dans chaque cas, déterminer les racines dans $\mathbb{R}$ du polynôme $f(x)$.

1°) $f(x)=2x^2-3x-1$; 2°) $f(x)=5x-x^2$; 3°) $f(x)=8-4x^2$; 4°) $f(x)=3x-x^2-2$; 5°) $f(x)=x^2-6x+1$.
Vérifier en utilisant la calculatrice (éventuellement photomaths ou dcode).

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1°) $x^4+x^2-2=0 \quad (1)$; 2°) $x^2-4|x|+3=0 \quad (2)$.

Vérifier les solutions de (1) en utilisant la calculatrice et les solutions de (2) à l'aide de photomaths ou de dcode.

4 On considère l'équation $x^2-2(m-1)x+2m+1=0 \quad (\text{E})$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où m désigne un paramètre réel.

1°) Déterminer le nombre de racines de (E) suivant les valeurs de m.

2°) Lorsque (E) admet deux solutions distinctes, exprimer leur somme S et leur produit P en fonction de m.

Déterminer une relation entre S et P indépendante de m.

5 Factoriser si possible le polynôme $f(x)$ en facteurs du premier degré.

1°) $f(x)=3x^2-2x-5$; 2°) $f(x)=-x^2-4x-3$

Vérifier les factorisations à la main puis avec dcode ou photomaths.

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$x^4-4x^2+3<0 \quad (1)$; $x^2+|x|-2 \geqslant 0 \quad (2)$.

7 Dans chaque cas, déterminer lorsque cela est possible deux réels dont la somme est S et le produit P.
1°) $S=4$ et $P=3$; 2°) $S=9$ et $P=30$; 3°) $S=-4$ et $P=-21$; 4°) $S=4$ et $P=-46$;

5°) $S=72$ et $P=1296$; 6°) $S=17$ et $P=50$; 7°) $S=27$ et $P=50$; 8°) $S=-\dfrac{3}{4}$ et $P=-\dfrac{5}{2}$

8 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2+y^2+4x+4y-17=0$.

1°) Démontrer que $\mathcal{C}$ est un cercle. Préciser son centre et son rayon.
Tracer le cercle sur l'écran de la calculatrice Numworks pour vérifier graphiquement.
Pour cela, aller dans Graphique puis Ajouter un élément et sélectionner conique puis modifier l'équation proposée.
Régler les axes de manière à avoir un repère orthonormé.
2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite D d'équation $x-2y+3=0$.

9 On considère l'équation $mx^2-2(m-2)x+m-3=0 \quad (\text{E})$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où m désigne un paramètre réel.

1°) Déterminer le nombre de solutions de (E) suivant les valeurs de m.

2°) Lorsque (E) admet deux solutions distincte, exprimer leur somme S et leur produit P en fonction de m.

Déterminer une relation entre S et P indépendante de m.

10 Dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y=x^2+x+1$.

1°) Déterminer les coordonnées du sommet S de $\mathcal{C}$.
2°) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite D d'équation $x+y-5=0$.

11 Déterminer le maximum de l'expression $x(3-x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$.

12 Pour tout réel m, on note $\mathcal{C}_m$ la « courbe » d'équation $y=(m+2)x^2+mx-m+1$ dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (m : paramètre).

1°) Déterminer la nature de $\mathcal{C}_m$ suivant les valeurs de m.

2°) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par deux points fixes A et B dont on donnera les coordonnées.

3°) Démontrer que lorsque $\mathcal{C}_m$ est une parabole, elle coupe l'axe des abscisses en deux points distincts.

4°) Lorsque $\mathcal{C}_m$ est une parabole, on note S_m son sommet.

Calculer les coordonnées de S_m en fonction de m.

À l'aide de la calculatrice en mode paramétrique, représenter la courbe Γ formée par les points S_m lorsque m décrit $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Démontrer que Γ a pour équation $y=\dfrac{7}{2}-x-\dfrac{5}{2(2x+1)}$.

On peut démontrer que Γ est une hyperbole.

13 On considère la fonction $f : x \mapsto |x^2-2x-3|$.

Exprimer $f(x)$ en fonction de x sans barres de valeur absolue.

14 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}_m$ la courbe d'équation $x^2+y^2-2mx-4my-3=0$ où m est un réel quelconque.

1°) Démontrer que pour tout réel m, la courbe $\mathcal{C}_m$ est un cercle. Préciser les coordonnées de son centre Ω_m et son rayon r_m.

2°) Quel est l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

3°) Tracer plusieurs cercles $\mathcal{C}_m$ sur l'écran de la calculatrice pour différentes valeurs de m.

On pourra aussi utiliser Geogebra en créant un curseur.
Observer que tous les cercles $\mathcal{C}_m$ semblent passer par deux points fixes.

Démontrer que cette conjecture est vraie.

On dit que les cercles $\mathcal{C}_m$ forment un faisceau de cercles à points de base.

15 On considère l'équation $ax^2+bx+c=0 \quad (\text{E})$ où a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$.

On suppose que le discriminant de (E) est positif ou nul.

On note x_1 et x_2 les racines de (E).

On pose $\text{A}={x_1}^2+{x_2}^2$.

1°) En utilisant les expressions de x_1 et x_2 en fonction de a, b, c, exprimer A en fonction de a, b, c.

2°) En utilisant l'égalité $\text{A}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, exprimer A en fonction de a, b, c.

$\boxed{\textbf{15 bis}}$ On considère l'équation $ax^2+bx+c=0$ (E) où a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$.

On suppose que le discriminant de (E) est positif ou nul.

On note x' et x'' les racines de (E) distinctes ou confondues.

On pose $\text{A}=(x')^2+(x'')^2$; $\text{B}=\dfrac{1}{x'}+\dfrac{1}{x''}$, $\text{C}=(x')^2x''+x'(x'')^2$, $\text{D}=\dfrac{x'}{x''}+\dfrac{x''}{x'}$, $\text{E}=(x')^3+(x'')^3$.

Exprimer A, B, C, D, E en fonction de a, b, c.
On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

Idée (astuce) : On exprime chacune des expressions en fonction de la somme S et du produit P des racines.
Les calculs sont alors très simples et pas aussi épouvantables que si l'on utilisait les expressions des racines.
A, B, C, D, E sont des expressions algébriques symétriques en x' et x''.

$\boxed{\textbf{16}}$ On admet que les polynômes du second degré 2 suivants ont un discriminant positif. Déterminer, pour chaque polynôme, le signe de ses racines sans les calculer.
$P_1(x)=-x^2+12x-32$; $P_2(x)=7x^2+21x-13$; $P_3(x)=2x^2+99x+29$.

Vocabulaire :

racine / zéro / solution

polynôme / monôme / équation

degré

Équations / inéquations bicarrées avec changement d'inconnue

Solution photomaths : On distingue deux cas selon que le signe de x.

Fonctions paires / impaires

Rajouter exercices sur la valeur absolue (indispensable).

Pour résoudre un système linéaire sur calculatrice
Modèle TI-83 premium CE
-on appuie sur la touche résol
-on appuie sur la touche 2 (PlySmlt2: ply=polynôme Smlt=simultaneous système)
-on appuie sur la touche 2 (sol veut syst d'équation)
-le menu nous propose le nombre d'équations, nombre d'inconnues, on modifie si besoin
- touche SUIVANT
- on rentre les différents coefficients à la place des zéros en appuyant à chaque fois sur la touche entrer
- on appuie sur la touche graphe c'est-à-dire resol pour résoudre le système

Lyne Naccache élève de T1 année scolaire 2020-2021

Le dimanche 20 mars 2022 au lundi 21 mars 2022

Règle de dédoublement des termes pour trouver une équation à une parabole (ou à un cercle)

Équation et inéquation bicarrée : on peut factoriser le polynôme

Factorisation d'un polynôme de degré quelconque scindé à racines simples : alternance de + et de –.

Corrigé

$\boxed{1}$ Forme canonique d'un polynôme du second degré

On utilise la méthode « artisanale », c'est-à-dire par reconstitution d'identités remarquables (pas d'application de formules).

On fait apparaître une identité remarquable.

1°)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 - 6x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 - 2 \times x \times 3 + 1$ ligne facultative

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \left(x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2\right) - 3^2 + 1$ ligne facultative

$= \left(x^2 - 6x + 9\right) - 8$

$= (x-3)^2 - 8$

2°)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 4x - x^2$

$= -\left(x^2 - 4x\right)$

$= -\left[(x-2)^2 - 4\right]$

$= 4 - (x-2)^2$

3°)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 - x + 2$

$= x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + 2$

$= \left[x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2$

$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2$

$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

4°)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 3x^2 - 6x - 5$

$= 3\left(x^2 - 2x\right) - 5$

On effectue une factorisation partielle des 2 premiers termes par le coefficient de x^2.

On évite de factoriser toute l'expression car ici, cela introduit des fractions.

$= 3\left[(x-1)^2 - 1\right] - 5$

$= 3(x-1)^2 - 8$

Dans chaque cas, on peut utiliser les procédures classiques de vérification.

1ère méthode :

On développe chaque expression trouvée pour voir si l'on retombe bien sur l'expression de départ.
Éventuellement, on peut utiliser la technique qui consiste à remplacer x par π ou e sur la calculatrice Numworks.

2e méthode :

On utilise la méthode des valeurs tests.

Par exemple, pour $f(x) = x^2 - 6x + 1$, on calcule $f(0)$.

Par calcul mental, $f(0) = 0^2 - 6 \times 0 + 1 = 1$.

Avec l'expression obtenue $(x-3)^2 - 8$, un simple calcul mental donne également $(0-3)^2 - 8 = 3^2 - 8 = 1$.

Les deux résultats sont égaux.

On prend ensuite deux autres valeurs tests, par exemple 1 et 2, dont le calcul de l'image par f est simple.

Trois valeurs tests différentes suffisent à démontrer l'égalité de deux polynômes du second degré.

$\boxed{2}$

Toutes les expressions proposées sont des polynômes du second degré.

1°) $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$

On calcule le discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 17$ (formule appliquée en situation).

$\Delta > 0$ donc $f(x)$ admet deux racines distinctes réelles qui sont $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$.

On emploie bien le mot « racine » et non « solution ».

On effectue une vérification grâce à la calculatrice.

2°) $f(x) = 5x - x^2$

On factorise $f(x)$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x(5-x)$.
Les racines de $f(x)$ sont 0 et 5.

3°) $f(x) = 8 - 4x^2$
On factorise $f(x)$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 4(2-x^2)$.
Les racines de $f(x)$ sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ (résolution mentale de l'équation $2 - x^2 = 0$ qui est équivalente à $x^2 = 2$).

4°) $f(x) = 3x - x^2 - 2$

On constate que 1 est une racine évidente (car $f(1) = 0$ par calcul mental simple). On peut donc affirmer que le discriminant de $f(x)$ est positif ou nul et que $f(x)$ admet une autre racine distincte ou confondue que l'on peut trouver grâce à la formule donnant la somme ou le produit des racines d'un polynôme du second degré.

Les racines de $f(x)$ sont 1 (racine évidente) et 2 (racine calculée par produit).

En effet, on sait que la deuxième racine α vérifie $1 \times \alpha = \dfrac{-2}{-1}$ (formule du produit) qui donne $\alpha = 2$.

5°) $f(x) = x^2 - 6x + 1$

On calcule le discriminant réduit $\Delta' = (-3)^2 - 1 \times 1 = 8$.
$\Delta' > 0$ donc $f(x)$ admet deux racines distinctes réelles qui sont $x_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $x_1 = 3 - 2\sqrt{2}$.

$\boxed{3}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1°) $x^4 + x^2 - 2 = 0 \quad (1)$; 2°) $x^2 - 4|x| + 3 = 0 \quad (2)$.
Vérifier les solutions de (1) en utilisant la calculatrice et les solutions de (2) à l'aide de photomaths ou de dcode.

1°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 + x^2 - 2 = 0 \quad (1)$.

L'équation (1) est une équation polynomiale de degré 4 particulière appelée équation bicarrée.

L'équation (1) est une équation bicarrée.

On se ramène à une équation du second degré grâce à un changement d'inconnue bien choisi.

On pose $X = x^2$ (changement d'inconnue).

L'équation (1) s'écrit : $X^2 + X - 2 = 0 \quad (1')$.

Les racines de $(1')$ (équation du second degré) sont $X_1 = 1$ (racine évidente) et $X_2 = -2$ (racine calculée grâce au produit).
Or $X = x^2$.

On reprend l'équation (1).

$(1) \Leftrightarrow x^2 = 1$ ou $x^2 = -2$ (impossible dans $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \{-1 ; 1\}$

On effectue une vérification.

2°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 4|x| + 3 = 0 \quad (2)$.

$|x|$ est la valeur absolue de x.
C'est la distance entre 0 et x (définition de la valeur absolue d'un réel).

Si $x \geqslant 0$, $|x| = x$.

Si $x \leqslant 0$, $|x| = -x$.

1ère méthode :

On utilise le rappel pour enlever la valeur absolue.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \quad (2') \\ x \geqslant 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0 \quad (2'') \\ x < 0 \end{cases}$$

On résout $(2')$ et $(2'')$. Ce sont deux équations du second degré.

Les racines de $(2')$ sont 1 (racine évidente) et 3 (obtenue par produit). On peut retenir ces deux valeurs car elles sont positives ou nulles.

Les racines de $(2'')$ sont – 1 (racine évidente) et – 3 (obtenue par produit). On peut retenir ces deux valeurs car elles sont strictement négatives.

$(2) \Leftrightarrow x=1$ ou $x=3$ ou $x=-1$ ou $x=-3$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2=\{-1\,;1\,;3\,;-3\}$

Cette méthode est plus longue que la suivante qu'il vaut mieux privilégier.

2[e] méthode :

On utilise un changement d'inconnue.

On pose $X=|\,x\,|$.

On a alors $X^2=|\,x\,|^2=x^2$ (propriété de valeur absolue).

L'équation (2) s'écrit : $X^2-4X+3=0$ $(2')$.

Les racines de $(2')$ (équation du second degré) sont $X_1=1$ et $X_2=3$ (l'une par racine évidente, l'autre par produit).
Or $X=|\,x\,|$.
On reprend l'équation (2).

$(2) \Leftrightarrow |\,x\,|=1$ ou $|\,x\,|=3$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ ou $x=3$ ou $x=-3$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2=\{-1\,;1\,;3\,;-3\}$

$\boxed{4}$ Équation avec paramètre

$x^2-2(m-1)x+2m+1=0$ (E)

m : paramètre réel

(E) est une équation du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-2(m-1)$, $c=2m+1$.

On pose $b'=\dfrac{b}{2}=-(m-1)$.

1°) Déterminons le nombre de racines de (E) suivant les valeurs de *m*.

(E) est une équation du second degré.

On calcule le discriminant réduit.

$\Delta'=\left[-(m-1)\right]^2-1\times(2m+1)$ (on applique la formule du discriminant réduit « en situation »)

$=(m-1)^2-(2m+1)$

$=m^2-2m+1-2m-1$

$=m^2-4m$

$=m(m-4)$

Le signe de Δ' se trouve facilement. Les valeurs charnières pour *m* sont 0 et 4 (ce sont les valeurs d'annulation des facteurs *m* et $m-4$).

$m(m-4)$ est un polynôme du second degré en *m*. Son monôme de degré 2 est m^2.
On observe que son coefficient est strictement positif ce qui donne le signe suivant les valeurs de *m* grâce à la règle du signe d'un polynôme du second degré.

M	$-\infty$		0		4		$+\infty$
Signe de Δ'		+	0	–	0	+	
Nombre de solutions de (E) dans $\mathbb{R}$		2	1	0	1	2	
			↑ racine double		↑ racine double		

2°) Lorsque (E) admet deux solutions distinctes, exprimons leur somme et leur produit en fonction de *m*.

(E) admet deux racines réelles distinctes si et seulement si $m\in\left]-\infty\,;0\right[\cup\left]4\,;+\infty\right[$.

On applique les formules donnant la somme et le produit des racines.

La somme des racines vaut $S=-\dfrac{b}{a}=2(m-1)$.

Le produit des racines vaut $P=\dfrac{c}{a}=2m+1$.

Déterminons une relation entre *S* et *P* indépendante de *m*.

On cherche à éliminer *m* entre *S* et *P* (technique d'élimination).

On observe que $P-S=3$.

On peut aussi calculer $S-P=2(m-1)-(2m+1)=2m-2-2m-1=-3$.

$\boxed{5}$ Factorisations de polynômes du second degré

Factoriser si possible le polynôme $f(x)$ en facteurs du premier degré.

1°) $f(x)=3x^2-2x-5$

2°) $f(x)=-x^2-4x-3$

Vérifier les factorisations à la main puis avec dcode ou photomaths.

Solution :

On utilise la formule de factorisation $a(x-x_1)(x-x_2)$ prête à l'emploi dans le cas où le polynôme admet deux racines distinctes ou confondues.

On n'oublie pas le *a* en facteur.

On ne repasse pas par la forme canonique.

1°) $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=3x^2-2x-5$

Les racines de $f(x)$ sont – 1 (racine évidente) et $\dfrac{5}{3}$ (valeur obtenue par produit des racines).

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=3(x+1)\left(x-\dfrac{5}{3}\right)$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=(x+1)(3x-5)$ (on a associé 3 avec le deuxième facteur : $3\left(x-\dfrac{5}{3}\right)=3x-5$)

On pourrait aussi associer 3 avec le premier facteur mais le choix du deuxième facteur est à privilégier car il enlève ainsi la fraction.

On n'oublie pas de tester l'égalité pour des valeurs de *x*. On teste déjà pour $x=0$.

Rédaction du test :

D'une part, $f(0)=3\times0^2-2\times0-5=-5$.

D'autre part, $(0+1)(3\times0-5)=1\times(-5)=-5$.

On constate que les deux résultats sont égaux.

On choisit ensuite deux autres valeurs de *x*.

Il est conseillé également de développer chaque expression obtenue pour voir que l'on retombe bien sur l'expression de départ.

2°) $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=-x^2-4x-3$

Les racines de $f(x)$ sont – 1 et – 3 (l'une évidente, l'autre obtenue par produit).

On peut aussi passer par le discriminant réduit $\Delta'=4-3=1$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=-(x+1)(x+3)$

$\boxed{6}$ Résolutions d'inéquations avec changements d'inconnue

1°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4-4x^2+3<0 \quad (1)$.

Il s'agit d'une inéquation bicarrée.

On pose $X=x^2$.

L'inéquation (1) s'écrit : $X^2-4X+3<0 \quad (1')$.

Les racines du polynôme X^2-4X+3 (polynôme du second degré) sont $X_1=1$ et $X_2=3$ (l'une par racine évidente, l'autre par produit).

$(1') \Leftrightarrow 1<X<3$ (règle du signe d'un polynôme du second degré)

Or $X=x^2$.
On reprend l'inéquation (1).

$(1) \Leftrightarrow 1<x^2<3$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}<x<-1$ ou $1<x<\sqrt{3}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=\left]-\sqrt{3}\,;-1\right[\cup\left]1\,;\sqrt{3}\right[$

On effectue une vérification.

2°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2+|x|-2\geqslant 0 \quad (2)$.

1[ère] méthode : On distingue deux cas suivant le signe de *x* ($x\geqslant0$, $x<0$).

Cette méthode est assez longue et n'est donc pas recommandée.
La deuxième méthode est beaucoup plus rapide.

2[e] méthode : On effectue un changement d'inconnue.

On pose $X=|x|$.

L'inéquation (2) s'écrit : $X^2+X-2\geqslant 0 \quad (2')$.

Les racines du polynôme X^2+X-2 (polynôme du second degré) sont $X_1=1$ et $X_2=-2$ (l'une par racine évidente, l'autre par produit).

$(2') \Leftrightarrow X\geqslant1$ ou $X\leqslant-2$

Or $X=|x|$.
On reprend l'inéquation (2).

$(2) \Leftrightarrow |x| \geqslant 1$ ou $|x| \leqslant -2$ (impossible)

$\Leftrightarrow x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2 =]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$

$\boxed{7}$ **Recherche de deux réels connaissant leur somme et leur produit**

On connaît la propriété du cours :

Les réels cherchés, s'ils existent, sont les racines (ou les zéros) du polynôme $x^2 - Sx + P$.

On évite d'utiliser une méthode par système.

1°) $S = 4$ et $P = 3$

Les réels cherchés, s'ils existent, sont les racines du polynôme $x^2 - 4x + 3$.

Les réels cherchés sont 1 (racine évidente) et 3 (racine obtenue par produit).

On peut aussi déterminer les racines du polynôme à l'aide du discriminant réduit ou de la calculatrice.

• Pour la conclusion, on répond par une phrase. On n'écrit pas $S = \{...\}$ (déjà la lettre S a été utilisée pour noter la somme !).

• Même s'il est très facile, ici, de trouver les nombres cherchés, on passe par la méthode du polynôme. On ne le fait pas par devinette.

2°) $S = 9$ et $P = 30$

Les réels cherchés, s'ils existent, sont les racines du polynôme $x^2 - 9x + 30$.

On calcule le discriminant :

$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 30 = 81 - 120$

Le discriminant est strictement négatif donc le polynôme n'a pas de racines réelles.

Il n'existe donc pas de réels tels que $S = 9$ et $P = 30$.

3°) $S = -4$ et $P = -21$

Les réels cherchés, s'ils existent, sont les racines du polynôme $x^2 + 4x - 21$.

Il y a deux méthodes :
• racine évidente : 3

• discriminant réduit : $\Delta' = 25$
On trouve les nombres 3 et – 7.

4°) $S = 4$ et $P = -46$

Les réels cherchés, s'ils existent, sont les racines du polynôme $x^2 - 4x - 46$.

On calcule le discriminant réduit : $\Delta' = 50$.

On trouve les nombres $2 + 5\sqrt{2}$ et $2 - 5\sqrt{2}$.

5°) $S = 72$ et $P = 1296$

Les réels cherchés, s'ils existent, sont les racines du polynôme $x^2 - 72x + 1296$.

On calcule le discriminant réduit : $\Delta' = 0$.

On a donc une racine double : 36.
On trouve les nombres 36 et 36.

6°) $S = 17$ et $P = 50$

Les réels cherchés, s'ils existent, sont les racines du polynôme $x^2 - 17x + 50$.

On calcule le discriminant : $\Delta = 89$.

On trouve les nombres $\dfrac{17 - \sqrt{89}}{2}$ et $\dfrac{17 + \sqrt{89}}{2}$.

7°) $S = 27$ et $P = 50$

Dans ce cas, il n'y a pas besoin de recourir au polynôme. Les nombres cherchés apparaissent de manière évidente (sautent aux yeux) : il s'agit des nombres 2 et 25.

Les réels cherchés, s'ils existent, sont les racines du polynôme $x^2 - 27x + 50$.

Il y a deux méthodes :

• racine évidente : 2

• discriminant : $\Delta = 529$

On trouve les nombres 2 et 25.

8°) $S = -\dfrac{3}{4}$ et $P = -\dfrac{5}{2}$

Les réels cherchés, s'ils existent, sont les racines du polynôme $x^2 + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{2}$.

Il y a deux méthodes :

• racine évidente : – 2

• discriminant : $\Delta = \dfrac{169}{16}$

On trouve les nombres – 2 et $\dfrac{5}{4}$.

$\boxed{8}$

plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$

$\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$

1°) Démontrons que $\mathcal{C}$ est un cercle. Précisons son centre et son rayon.

Une idée possible :

> $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ où a, b, c sont trois réels
>
> discussion suivant a, b, c
>
> On n'apprend pas la discussion par cœur.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\text{M} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y+2)^2 - 4 - 17 = 0$ (on met sous forme canonique les polynômes $x^2 + 4x$ et $y^2 + 4y$)

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+2)^2 = 25$ [ou $\left(x-(-2)\right)^2 + \left(y-(-2)\right)^2 = 25$]

La dernière égalité obtenue permet d'affirmer que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-2\,;-2)$ et de rayon 5.

Propriété :

> Soit a, b, k trois réels.
> On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
>
> La nature de $\mathcal{C}$ dépend du signe de k.
>
> On effectue une discussion.
>
> • Si $k > 0$, alors $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(a\,;\,b)$ et de rayon $\sqrt{k}$.
> • Si $k = 0$, alors $\mathcal{C}$ est le singleton $\{\Omega\}$ avec $\Omega(a\,;\,b)$.
> • Si $k < 0$, alors $\mathcal{C}$ est l'ensemble vide.

Un singleton est un ensemble constitué d'un seul élément.

Dans le cas où $k = 0$, $\mathcal{C}$ est l'ensemble constitué du seul point $\Omega(a\,;\,b)$. On peut écrire l'égalité d'ensembles $\mathcal{C} = \{\Omega\}$.

Dans le cas où $k < 0$, il n'y a aucun point du plan appartenant à $\mathcal{C}$. On peut écrire l'égalité d'ensembles $\mathcal{C} = \varnothing$.

On notera l'usage de l'article « le » dans le cas où $k > 0$.

2°) Déterminons les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite D d'équation $x - 2y + 3 = 0$.

Les couples de coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D sont les solutions du système $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$.

Ce système n'est pas linéaire. On le résout par substitution.

Version plus courte (raccourci qui évite le système) :

D a pour équation $x = 2y - 3$.

Les ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions de l'équation $(2y-3)^2 + y^2 + 4(2y-3) + 4y - 17 = 0 \quad (1)$.

Cette équation s'appelle l'équation aux ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D.

$(1) \Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 + y^2 + 8y - 12 + 4y - 17 = 0$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 20 = 0$

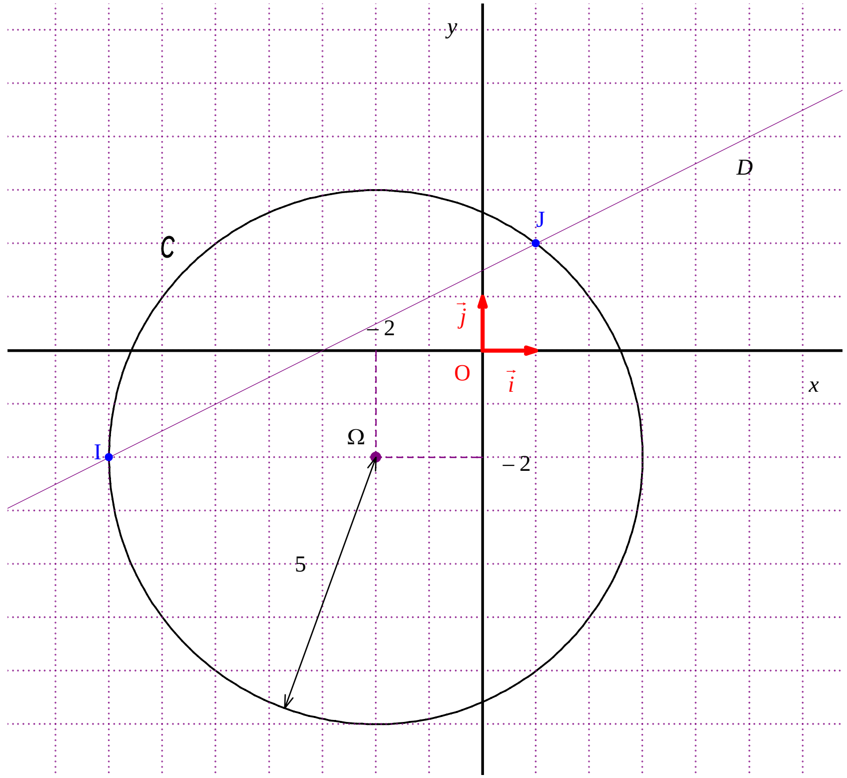
$\Leftrightarrow y^2 = 4$

$\Leftrightarrow y = 2$ ou $y = -2$

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont $\text{I}(1\,;\,2)$ et $\text{J}(-7\,;-2)$.

On calcule les abscisses de ces points grâce à l'équation de D ($x = 2y - 3$).

On peut vérifier sur un graphique (par exemple, sur Geogebra).



$\boxed{9}$ Équation avec paramètre

$mx^2-2(m-2)x+m-3=0 \quad (\mathrm{E})$

m : paramètre réel

L'équation (E) peut aussi s'écrire $mx^2-2x(m-2)+m-3=0$.

1°) Déterminons le nombre de solutions de (E) suivant les valeurs de *m*.

On regarde si (E) est une équation du second degré.

1er cas : $m\neq 0$

Dans ce cas, (E) est bien une équation du second degré.

Calculons son discriminant réduit.

$\Delta' = \left[-(m-2)\right]^2 - m(m-3)$ (on applique la formule du discriminant « en situation »)

$= (m-2)^2 - m^2 + 3m$

$= \cancel{m^2} - 4m + 4 - \cancel{m^2} + 3m$

$= 4-m$

Le signe de Δ' se trouve facilement. La valeur charnière pour *m* est 4.

2e cas : $m=0$

Dans ce cas, (E) s'écrit $0\times x^2-2(0-2)x+0-3=0$ soit $4x-3=0$.
Il s'agit d'une équation du premier degré.
(E) admet $\dfrac{3}{4}$ pour unique solution (résolution immédiate).

m	$-\infty$		0		4		$+\infty$
Signe de Δ'		+	||	+	0	–	
Nombre de solutions de (E) dans $\mathbb{R}$		2	1	2	1	0	

On ne demande pas l'expression des racines en fonction de *m*.

2°) Lorsque (E) admet deux solutions distinctes, exprimons leur somme et leur produit en fonction de *m*.

(E) admet deux solutions distinctes si et seulement si $m\in\left]-\infty\,;0\right[\cup\left]0\,;4\right[$.

On applique les formules donnant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré.

$S=-\dfrac{-2(m-2)}{m}$

$=\dfrac{2(m-2)}{m}$

$=\dfrac{2m-4}{m}$

$P=\dfrac{m-3}{m}$

Déterminons une relation entre *S* et *P* indépendante de *m*.

Il n'y a pas de formule particulière pour résoudre cette question.

On essaie d'éliminer le paramètre *m* entre les deux égalités (« procédé d'élimination du paramètre *m* entre deux égalités »).

On écrit pour cela $S=2-\dfrac{4}{m}$ et $P=1-\dfrac{3}{m}$.

On va former une combinaison linéaire de S et P qui va éliminer les m (il faut réfléchir un peu).
Une telle technique s'utilise assez fréquemment en arithmétique.

On a $3S-4P=3\left(2-\dfrac{4}{m}\right)-4\left(1-\dfrac{3}{m}\right)=2$.

« La » (plutôt « une ») relation entre S et P indépendante de m est $3S-4P=2$.

10

$\mathcal{C}$: $y=x^2+x+1$

1°) On sait que le sommet d'une parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ (a étant non nul) a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$.

$$\text{S}\left|\begin{array}{l} x_\text{S}=-\dfrac{1}{2} \\ y_\text{S}={x_\text{S}}^2+x_\text{S}+1=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{4}\quad (\text{car } \text{S}\in\mathcal{C}) \end{array}\right.$$

N.-B. : La tangente à $\mathcal{C}$ en S est horizontale.

La méthode consister à passer par la forme canonique est à éviter (perte de temps).

2°)

On peut utiliser un système de deux équations à deux inconnues.

On peut utiliser dcode.

D a pour équation réduite $y=5-x$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D sont les solutions de l'équation $x^2+x+1=5-x$ (1).

$(1) \Leftrightarrow x^2+2x-4=0$ ($\Delta'=5$, on peut utiliser la calculatrice)

$x^2+2x-4=0$ est une équation du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=2$, $c=4$.

On pose $b'=\dfrac{b}{2}=1$.

On calcule le discriminant réduit :

$$\begin{aligned}\Delta'&=b'^2-ac\\&=1^2-1\times(-4)\\&=5\end{aligned}$$

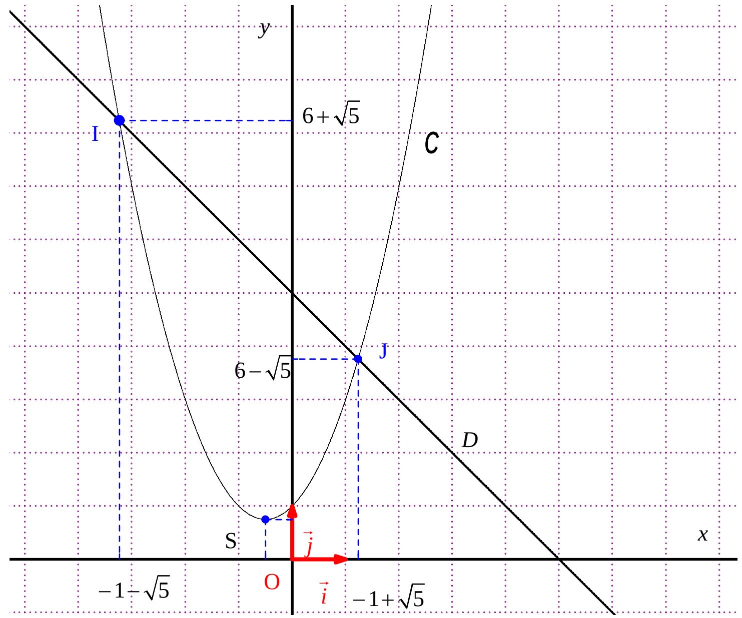
On applique les formules des racines lorsque le discriminant réduit est strictement positif : $\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.

$\Leftrightarrow x=-1+\sqrt{5}$ ou $x=-1-\sqrt{5}$

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D ont pour coordonnées $\left(-1+\sqrt{5}\,;6-\sqrt{5}\right)$ et $\left(-1-\sqrt{5}\,;6+\sqrt{5}\right)$.

On a calculé les ordonnées des points à l'aide de l'équation réduite de D (plus simple que d'utiliser l'équation de $\mathcal{C}$).

On vérifie en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.



Calculatrice Numworks :

On peut tracer $\mathcal{C}$ et D sur la calculatrice. On adapte la fenêtre graphique.

- aller sur fonctions.

- taper les deux fonctions.

- aller sur « graphique » puis appuyer directement sur « ok ».

- aller sur « calcul » puis sur « intersection » (idem maximum et minimum).

La calculatrice permet de contrôler les résultats grâce aux valeurs approchées (commande d'intersection).

11

Déterminons le maximum de l'expression $x(3-x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$.

On considère la fonction $f : x \mapsto x(3-x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

On va déterminer le maximum (global) de f sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 3x - x^2$

1ère méthode :

On utilise le résultat sur les extremums des fonctions polynômes du second degré.

On pourrait passer par la forme canonique mais cela fait perdre du temps.

f est une fonction polynôme du second degré.

Le coefficient de x^2 est -1.

Comme il est négatif, on sait, d'après le cours (propriétés sur maximum ou minimum d'une fonction polynôme du second degré), que f admet un maximum global sur $\mathbb{R}$ atteint en $x = -\dfrac{3}{2\times(-1)} = \dfrac{3}{2}$ (application directe du cours).

On calcule $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\times\left(3-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{4}$.

Conclusion : Le produit $x(3-x)$ est maximal lorsque $x = \dfrac{3}{2}$ et le maximum vaut $\dfrac{9}{4}$.

2e méthode :
On utilise la dérivée.

$D_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3 - 2x$

$3x - 2$ est une expression du type $ax + b$.

Valeur charnière :

$3 - 2x = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$\dfrac{9}{4}$	$\searrow$	

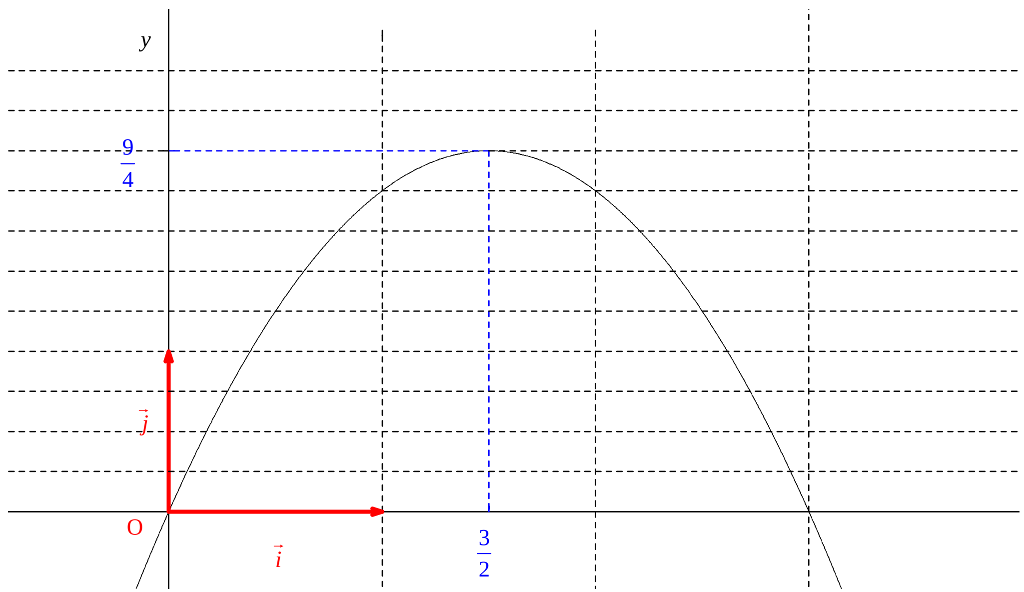
Calcul du maximum global

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\times\left(3-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{4}$

Phrases :

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right]$.

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.



Commentaires :

On ne met pas sous forme canonique (perte de temps).
On peut dresser le tableau de variations de *f*.
On peut éventuellement utiliser la dérivée.

On peut utiliser la commande de la calculatrice permettant de trouver un maximum ou un minimum de fonction.

> Parmi les rectangles de périmètre donné, quels sont ceux qui ont la plus grande aire ?
>
> Propriété : Parmi les rectangles de périmètre donné, ceux qui ont la plus grande aire sont les carrés.
>
> Exemple : Parmi les rectangles de périmètre 8, ceux qui ont la plus grande aire sont les carrés (de côté 2).

12

Famille de courbes dépendant d'un paramètre

$\mathcal{C}_m\ :\ y=(m+2)x^2+mx-m+1$ (m : paramètre)

1°) Déterminons la nature de $\mathcal{C}_m$ suivant les valeurs de m.

On effectue une discussion suivant les valeurs de m (on discute suivant les valeurs de m) c'est-à-dire que l'on distingue plusieurs cas suivant les valeurs de m.

discussion

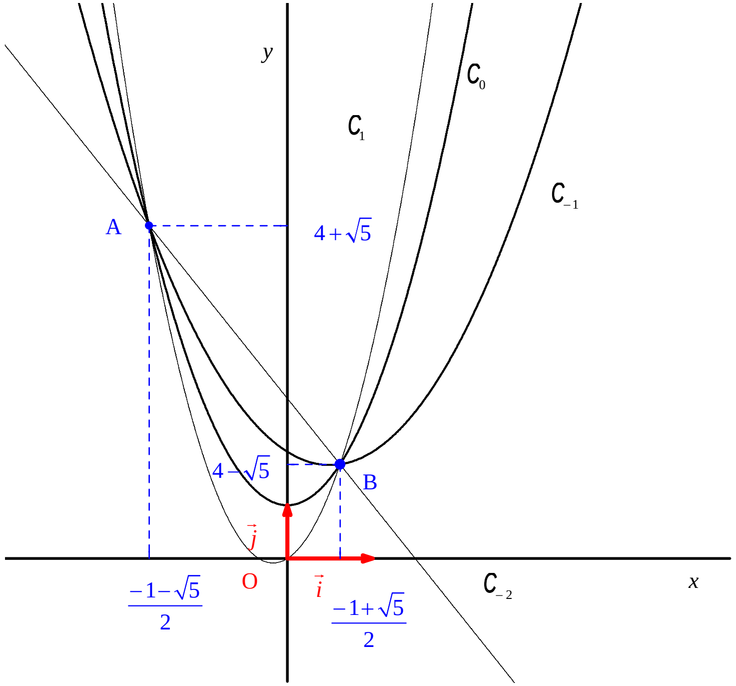
• Si $m\neq-2$, alors $\mathcal{C}_m$ est une parabole.

• Si $m=-2$, alors $\mathcal{C}_{-2}$ a pour équation $y=-2x+3$. $\mathcal{C}_{-2}$ est donc une droite.
2°) Démontrons que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par deux points fixes A et B.

On peut tracer plusieurs courbes $\mathcal{C}_m$ sur l'écran de la calculatrice.

On peut éventuellement utiliser *Geogebra* en créant un curseur.

$\mathcal{C}_{-2}\ :\ y=-2x+3$
$\mathcal{C}_{-1}\ :\ y=x^2-x+2$
$\mathcal{C}_{0}\ :\ y=2x^2+1$
$\mathcal{C}_{1}\ :\ y=3x^2+x$



On pose $P_m(x)=(m+2)x^2+mx-m+1$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad P_m(x)=m\left(x^2+x-1\right)+2x^2+1$

Le polynôme x^2+x-1 admet deux racines dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

$P_m(x_1)=m\left(x_1^{\,2}+x_1-1\right)+2x_1^{\,2}+1$ ($x_1^{\,2}+x_1-1=0$ car x_1 est une racine du polynôme x^2+x-1)

$$\begin{aligned}
&=m\times0+2x_1^{\,2}+1\\
&=2x_1^{\,2}+1\\
&=2\times\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+1\\
&=2\times\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)^2}{4}+1\\
&=\frac{1-2\sqrt{5}+5}{2}+1\\
&=\frac{6-2\sqrt{5}}{2}+1\\
&=3-\sqrt{5}+1\\
&=4-\sqrt{5}
\end{aligned}$$

De même, $P_m(x_2)=2x_2^2+1=2\times\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+1=2\times\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+1=...=4+\sqrt{5}$.

Ainsi, toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par les points $\mathrm{A}\left(x_1\,;\,4+\sqrt{5}\right)$ et $\mathrm{B}\left(x_2\,;\,4-\sqrt{5}\right)$.

Autre méthode :
On cherche l'intersection de deux courbes $\mathcal{C}_m$ pour deux valeurs différentes de m.
On obtient deux points A et B.
On montre ensuite que A et B appartiennent à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$.

On parle parfois de « faisceau de paraboles » passant par deux points.

3°) Déterminons l'ensemble des réels m tels que $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points distincts.

On observe tout d'abord que pour $m=-2$, $\mathcal{C}_{-2}$ est une droite non parallèle à l'axe des abscisses ui coupe donc l'axe des abscisses en un seul point.

On cherche donc les réels $m\neq-2$ tels que l'équation $(m+2)x^2+mx-m+1=0$ admette deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

On calcule le discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta&=m^2-4(m+2)(-m+1)\\&=m^2+4(m+2)(m-1)\\&=m^2+4\left(m^2+m-2\right)\\&=5m^2+4m-8\end{aligned}$$

On va calculer le discriminant réduit δ' du polynôme $5m^2+4m-8$.

$\delta'=4+40=44$

Le polynôme $5m^2+4m-8$ admet donc deux racines réelles distinctes qui sont $m_1=\dfrac{-4-2\sqrt{11}}{5}$ et $m_2=\dfrac{-4+2\sqrt{11}}{5}$.

m	$-\infty$		m_1		m_2		$+\infty$
Signe de Δ		+	0	$-$	0	+	

$m_1=-2{,}12664991...$ $\qquad$ $m_2=0{,}526649916...$

L'ensemble des réels m tels que $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points distincts est

$$\left]-\infty\,;\,\frac{-4-2\sqrt{11}}{5}\right[\cup\left]\frac{-4+2\sqrt{11}}{5}\,;\,+\infty\right[.$$

4°)

S_m : sommet de $\mathcal{C}_m$ pour $m\neq-2$
Calculons les coordonnées de S_m en fonction de m.

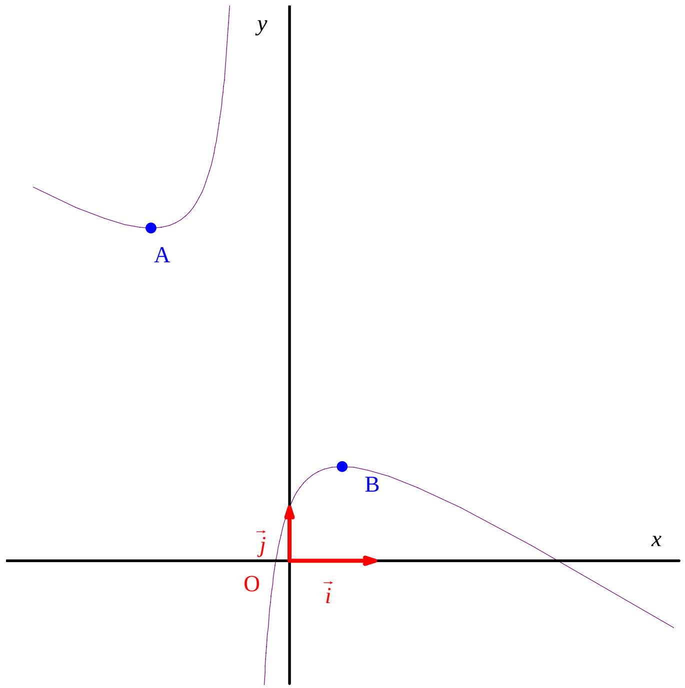
On applique les formules donnant les coordonnées du sommet d'une parabole $\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\,-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ (notations du cours, on applique évidemment la formule en situation).

$$\mathrm{S}_m\left|\begin{array}{l}x_{\mathrm{S}_m}=-\dfrac{m}{2(m+2)}\\[2mm] y_{\mathrm{S}_m}=-\dfrac{\Delta}{4(m+2)}=-\dfrac{5m^2+4m-8}{4(m+2)}\end{array}\right.$$

(on a calculé Δ à la question précédente)

S_m a pour coordonnées $\left(-\dfrac{m}{2(m+2)}\,;\,-\dfrac{5m^2+4m-8}{4(m+2)}\right)$.

L'ensemble Γ des points S_m lorsque m décrit $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ est la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases}x=-\dfrac{t}{2(t+2)}\\[2mm] y=-\dfrac{5t^2+4t-8}{4(t+2)}\end{cases}$.



On a déterminé le lieu des sommets des paraboles $\mathcal{C}_m$ lorsque m décrit $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

13

$f : x \mapsto \left| x^2 - 2x - 3 \right|$

Exprimons $f(x)$ en fonction de x sans barres de valeur absolue.

On utilise la propriété suivante où A est un réel quelconque.

$$|\,\mathrm{A}\,| = \begin{cases} \mathrm{A} \text{ si A est positif ou nul} \\ -\mathrm{A} \text{ si A est négatif ou nul} \end{cases}$$

La valeur absolue de 0 est égale à 0.

On va étudier le signe du polynôme $P(x) = x^2 - 2x - 3$.

Les racines du polynôme $P(x)$ sont – 1 (racine évidente) et 3.

Le signe de $P(x)$ s'obtient par la règle du signe d'un polynôme du second degré.

On a $f(x) = |P(x)|$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		x^2-2x-3	0	$-(x^2-2x-3)$	0	x^2-2x-3	

• Si $x \in]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[$, alors $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

• Si $x \in [-1\,;3]$, alors $f(x) = -(x^2 - 2x - 3)$.

Idée possible mais pas satisfaisante :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad [f(x)]^2 = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$ (formule de développement d'une somme)

$= \sqrt{x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9}$

C'est possible mais pas du tout intéressant dans notre situation.

14

Famille de courbes dépendant d'un paramètre

plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$

$\mathcal{C}_m$: $x^2 + y^2 - 2mx - 4my - 3 = 0$ (m : réel quelconque)

Il s'agit d'une famille de courbes (dont on va démontrer que ce sont des cercles) dépendant d'un paramètre *m*.

1°) Démontrons que pour tout réel m, la courbe $\mathcal{C}_m$ est un cercle. Précisons les coordonnées de son centre Ω_m et son rayon r_m.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M} \in \mathcal{C}_m \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2mx - 4my - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2mx) + (y^2 - 4my) - 3 = 0$ (mise sous forme canonique des trinômes du second degré en x et y)

$\Leftrightarrow (x-m)^2 - m^2 + (y-2m)^2 - 4m^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-m)^2 + (y-2m)^2 - 5m^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-m)^2 + (y-2m)^2 = 5m^2 + 3$

Pour tout réel m, $5m^2 + 3 > 0$ donc pour tout réel m, $\mathcal{C}_m$ est le cercle de centre $\Omega_m\,(m\,;2m)$ et de rayon $\sqrt{5m^2+3}$.

2°) Déterminons l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

D'après la question précédente, $\begin{cases} x_{\Omega_m} = m \\ y_{\Omega_m} = 2m \end{cases}$.

1[ère] méthode :

On reconnaît une représentation paramétrique de droite.

On peut donc dire que l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$ est la droite D de repère $(\mathrm{O}, \vec{u})$ (le point O est l'origine du repère ; c'est le point obtenu pour $m = 0$] et $\vec{u}\,(1\,;2)$.

2[e] méthode :

On observe immédiatement que $y_{\Omega_m} = 2x_{\Omega_m}$.

Ω_m appartient donc à la droite D d'équation $y = 2x$.

Comme $x_{\Omega_m} = m$, lorsque m décrit $\mathbb{R}$, x_{Ω_m} décrit $\mathbb{R}$.

On peut donc dire que l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$ est la droite D toute entière.

Systèmes d'équations paramétriques d'une droite dans le plan

Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

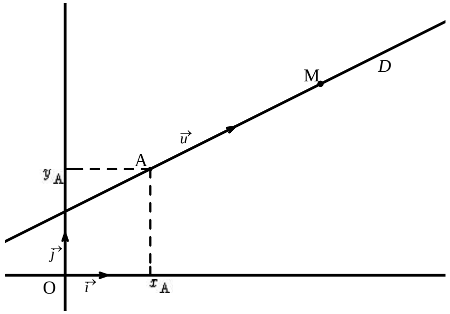
1°) Démonstration

Hypothèses :

$\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}} ; y_{\mathrm{A}}\right)$ est un point du plan.

$\vec{u}\,(\alpha ; \beta)$ est un vecteur <u>non nul</u> du plan.

D est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.



Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x ; y)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in D &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda \vec{u} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \begin{cases} x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{A}} = \lambda x_{\vec{u}} \\ y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{A}} = \lambda y_{\vec{u}} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \begin{cases} x - x_{\mathrm{A}} = \lambda \alpha \\ y - y_{\mathrm{A}} = \lambda \beta \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + \lambda \alpha \\ y = y_{\mathrm{A}} + \lambda \beta \end{cases}
\end{aligned}$$

Les égalités $x = x_{\mathrm{A}} + \lambda\alpha$ et $y = y_{\mathrm{A}} + \lambda\beta$ sont des égalités qui dépendent d'un paramètre λ (le même pour les deux).
On dit u'il s'agit d'équations paramétriques.
Comme pour les équations de droites, le terme d'équations est malheureux. Le mot équation a le sens d'égalité et non d'équation avec des inconnues à trouver (résolution d'une équation).

Le 13 septembre 2022

Le mot « équation » mal choisi pour équations paramétriques.

2°) Définition

Le système $\begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + \lambda\alpha \\ y = y_{\mathrm{A}} + \lambda\beta \end{cases}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) est appelé un **système d'équations paramétriques** de la droite *D* passant par le point $\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}} ; y_{\mathrm{A}}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(\alpha ; \beta)$; λ est appelé le **paramètre**.

Un point $\mathrm{M}(x ; y)$ du plan appartient à la droite *D* si, et seulement si, il existe un réel λ tel que les coordonnées x et y de M vérifient le système. Dans ce cas, λ est le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda\vec{u}$.

3°) Exemples

• Exemple 1

$\mathrm{A}\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$ $\qquad$ $\mathrm{B}\left|\begin{matrix}5\\-2\end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left|\begin{matrix}4\\-5\end{matrix}\right.$

Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) s'écrit $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 3 - 5\lambda \end{cases}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

On ne cherche pas la valeur de λ !

Un autre système d'équations paramétriques de la droite (AB) s'écrit $\begin{cases} x = 5 + 4\lambda' \\ y = -2 - 5\lambda' \end{cases}$ ($\lambda' \in \mathbb{R}$).

Pour déterminer une équation cartésienne de (AB), on élimine le paramètre entre les deux équations (comme en physique). Voir exemple 2 (on isolé le paramètre et on injecte dans l'autre équation / on effectue une combinaison linéaire en multipliant la première équation par 5 et la deuxième équation par 5 puis on additionne membre à membre).

Si l'on restreint l'ensemble des valeurs de (AB), on obtient une partie de la droite (AB).
Par exemple,
pour $\lambda \in [0 ; 1]$, on obtient le segment $[\mathrm{AB}]$;
pour $\lambda \in [0 ; +\infty[$, on obtient la demi-droite $[\mathrm{AB})$.

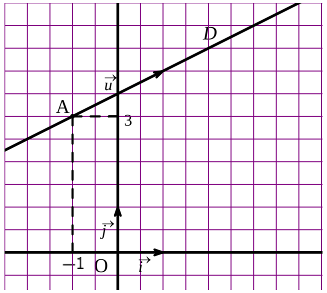
• Exemple 2

On considère la droite *D* définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

Définir la droite *D* par un point et un vecteur directeur et tracer *D*.
Déterminer une équation cartésienne de *D*.

D est la droite passant par le point $\mathrm{A}(-1 ; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2 ; 1)$.

Pour tracer *D*, on place le point A et on construit le vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$.



On peut noter que le point A correspond au paramètre $\lambda = 0$.
Pour déterminer une équation cartésienne de *D*, on élimine le paramètre entre les deux équations (comme en physique).

1ère méthode :

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda & (\mathrm{L}_1) \\ y = 3 + \lambda & (\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

On isole λ dans l'une des équations paramétriques et on injecte dans l'autre équation.

(L_2) donne $\lambda = y - 3$.
On reporte dans (L_1) : $x = -1 + 2y - 6$.
Une équation cartésienne de *D* s'écrit $x - 2y + 7 = 0$.

2e méthode :

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda & (\mathrm{L}_1) \\ y = 3 + \lambda & (\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

On effectue une combinaison linéaire entre les deux équations de sorte que le paramètre disparaisse.
On multiplie la première équation par 1 et la deuxième par – 2.

4°) Utilisation de la calculatrice graphique

Pour tracer une droite donnée sous la forme d'un système d'équations paramétriques, on se place en « mode paramétrique ».

TI : Dans mode, on sélectionne « par ».
On appuie sur la touche $\mathrm{Y} =$.
Dans $\mathrm{X}_{1\mathrm{T}} =$, on tape la première équation paramétrique ; dans $\mathrm{Y}_{1\mathrm{T}} =$, on tape la deuxième équation paramétrique.
On précise la fenêtre en faisant varier T dans un intervalle assez grand.

Écrire une équation paramétrique sur calculatrice :

$\boxed{\text{mode}}$

4e ligne par

$\boxed{f(x)}$

Exemple :

On désire tracer la droite admettant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

$\mathrm{X}_{1\mathrm{T}} = -1 + 2\mathrm{T}$
$\mathrm{Y}_{1\mathrm{T}} = 3 + \mathrm{T}$

On obtient T en appuyant sur la touche $\boxed{\mathrm{X,T,\theta,}n}$.
On peut obtenir un tableau de valeurs pour différentes valeurs du paramètre et le tracé de la droite.

5°) Obtention de points

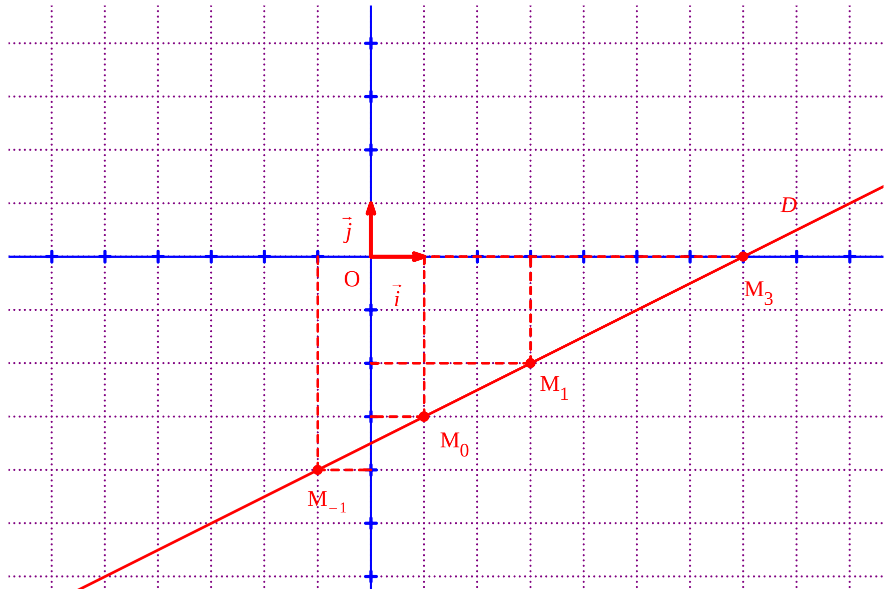
Considérons la droite *D* définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 + \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

$\lambda = 0$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$ Le point de coordonnées (1 ; – 3) appartient à *D*.

$\lambda = 1$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ Le point de coordonnées (3 ; – 2) appartient à *D*.

$\lambda = 3$ $\begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$ Le point de coordonnées (7 ; 0) appartient à *D*.

$\lambda = -1$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$ Le point de coordonnées (– 1 ; – 4) appartient à *D*.



6°) Comment passer d'une équation de droite à un système d'équations paramétriques

Exemple :

On note D la droite d'équation $2x+y-3=0$.

On isole x ou y.

En isolant y, on obtient $y=-2x+3$.

On peut écrire $\begin{cases} x=x \\ y=-2x+3 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x=t \\ y=-2t+3 \end{cases}$.

D a pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=t \\ y=-2t+3 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

En isolant x, on obtient $x=\dfrac{-y+3}{2}$.

On peut écrire $\begin{cases} x=\dfrac{-y+3}{2} \\ y=y \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x=\dfrac{-t+3}{2} \\ y=t \end{cases}$.

D a pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=\dfrac{-t+3}{2} \\ y=t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

On retiendra que x et y peuvent faire office de paramètres.

Le 14 septembre 2022

T spé

Soit A et B deux points distincts.

$\text{M}\in(\text{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MA}}$ et $\overrightarrow{\text{MB}}$ sont colinéaires

Possible mais pas très utile.

Le 14 septembre 2022 cours de 8h à 9h30

Exercice complémentaire

Dans le plan muni d'un repère, on considère le point $\text{A}(3\,;2)$ et le vecteur $\vec{u}\,(4\,;-1)$.

On note D la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Déterminer un système d'équations paramétriques.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$\text{M}\in D \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AM}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}\ /\ \overrightarrow{\text{AM}}=\lambda\vec{u}$ $\qquad \overrightarrow{\text{AM}}\left|\begin{array}{l} x-3 \\ y-2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}\ /\ \begin{cases} x-3=4\lambda \\ y-2=-\lambda \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}\ /\ \begin{cases} x=3+4\lambda \\ y=2-\lambda \end{cases}$

Un système d'équations paramétriques de D s'écrit $\begin{cases} x=3+4\lambda \\ y=2-\lambda \end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

Le 12 septembre 2022

$\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\sin t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ nature ? équation $x^2+y^2=1$

$\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=2\sin t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

$\begin{cases} x(t)=2\cos t \\ y(t)=\sin t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

$\boxed{\textbf{15}}$

a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$

$ax^2+bx+c=0$ $\quad(\text{E})$

Δ : discriminant de (E)

On suppose que $\Delta\geqslant 0$.

x_1 et x_2 : racines de (E) distinctes ou confondues

$\text{A}={x_1}^2+{x_2}^2$

1°) En utilisant les expressions de x_1 et x_2 en fonction de a, b, c, exprimer A en fonction de a, b, c.

$$A = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$= \frac{\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} + \frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2+\Delta-2b\sqrt{\Delta}+b^2+\Delta-2b\sqrt{\Delta}}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2+\Delta-2b\sqrt{\Delta}+b^2+\Delta+2b\sqrt{\Delta}}{4a^2}$$

$$= \frac{2b^2+2\Delta}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2+\Delta}{2a^2}$$

$$= \frac{b^2+b^2-4ac}{2a^2}$$

$$= \frac{2b^2-4ac}{2a^2}$$

$$= \frac{b^2-ac}{2a^2}$$

2°) En utilisant l'égalité $A = \left(x_1+x_2\right)^2 - 2x_1x_2$, exprimons A en fonction de *a*, *b*, *c*.

On pose $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1x_2$.

On sait que $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

$$A = \left(x_1\right)^2 + \left(x_2\right)^2$$

$$= \left(x_1+x_2\right)^2 - 2x_1x_2 \quad \text{(astuce)}$$

$$= S^2 - 2P$$
$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}$$
$$= \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$$
$$= \frac{b^2-2ac}{a^2}$$

15 bis

a, *b*, *c* sont trois réels tels que $a \neq 0$

$ax^2+bx+c=0 \quad (\mathrm{E})$

On suppose que le discriminant de (E) est positif ou nul.

On note x' et x'' les racines de (E) distinctes ou confondues.

$A = (x')^2 + (x'')^2$

$B = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$ (on suppose dans ce cas que $c \neq 0$)

$D = \frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'}$

$E = (x')^3 + (x'')^3$

Exprimons A, B, C, D, E en fonction de *a*, *b*, *c*.

Idée (astuce) : On exprime chacune des expressions en fonction de la somme *S* et du produit *P* des racines.
Les calculs sont alors très simples et pas aussi épouvantables que si l'on utilisait les expressions des racines.
A, B, C, D, E sont des expressions algébriques symétriques en x' et x''.

On pose $S = x' + x''$ et $P = x'x''$.

On sait que $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

A est la somme des carrés des racines de (E).

B est la somme des inverses des racines de (E).

Pour le A, les parenthèses autour de x' et de x'' sont facultatives. On devrait même ne pas les écrire.

$$\mathrm{A}=\left(x'\right)^2+\left(x''\right)^2$$
$$=\left(x'+x''\right)^2-2x'x'' \quad \text{(astuce)}$$
$$=S^2-2P$$
$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}$$
$$=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}$$
$$=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$\mathrm{B}=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}$$
$$=\frac{x'+x''}{x'x''}$$ (réduction au même dénominateur)
$$=\frac{S}{P}$$
$$=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}$$
$$=-\frac{b}{c}$$

$$\mathrm{C}=\left(x'\right)^2x''+x'\left(x''\right)^2$$
$$\mathrm{C}=x'\times x'x''+x'x''\times x''$$
(réécriture montrant le facteur commun)
$$=x'x''\left(x'+x''\right)$$
$$=P\times S$$
$$=\frac{c}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)$$
$$=-\frac{bc}{a^2}$$

$$\mathrm{D}=\frac{x'}{x''}+\frac{x''}{x'}$$
$$=\frac{x'^2+x''^2}{x'x''}$$
$$=\frac{\mathrm{A}}{P}$$
$$=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c}{a}}$$
$$=\frac{b^2-2ac}{a^2}\times\frac{a}{c}$$
$$=\frac{b^2-2ac}{a}\times\frac{1}{c}$$
$$=\frac{b^2-2ac}{ac}$$
$$=\frac{b^2}{ac}-2 \quad \text{(étape facultative)}$$

$$\mathrm{E}=\left(x'\right)^3+\left(x''\right)^3$$
$$=\left(x'+x''\right)^3-3\left(x'\right)^2x''-3x'\left(x''\right)^2$$
$$=\left(x'+x''\right)^3-3x'x''\left(x'+x''\right)$$
$$=S^3-3PS$$
$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)$$
$$=-\frac{b^3}{a^3}+3\frac{bc}{a^2}$$
$$=-\frac{b^3}{a^3}+3\frac{bc}{a^2}$$
$$=\frac{3abc-b^3}{a^3}$$

Autre façon pour E :

Pour le E, on commence par écrire l'identité cubique $\left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

On peut aussi se référer à l'identité $\mathrm{E}=\left(x'+x''\right)\left(x'^2+x'x''+x''^2\right)$.

Rappels de formules pour la somme et la différence de deux quotients :

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$ (à savoir écrire tout de suite)

$\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad-bc}{bd}$ (à savoir écrire tout de suite)

Rappels des identités remarquables cubiques :

$\left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

$\left(a+b\right)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

16 On admet que les polynômes de degré 2 suivants ont un discriminant positif. Déterminer, pour chaque polynôme, le signe de ses racines sans les calculer.
$P_1\left(x\right)=-x^2+12x-32$; $P_2\left(x\right)=7x^2+21x-13$; $P_3\left(x\right)=2x^2+99x+29$.

On va utiliser la somme et le produit des racines.

Pour chaque polynôme, on note S la somme des racines et P le produit des racines.

On commence par regarder le produit dans chaque cas.

- $P_1\left(x\right)=-x^2+12x-32$

On a $P>0$ (car $P=32$).

Les deux racines sont donc de même signe.

On s'intéresse ensuite à la somme.

On a $S>0$ (car $S=12$).

Les deux racines de $P_1\left(x\right)$ sont donc toutes les deux strictement positives.

- $P_2\left(x\right)=7x^2+21x-13$

On a $P<0$ (car $P=-\dfrac{13}{7}$).

Les deux racines sont donc de signes contraires.

Dans ce cas, on s'arrête là. On ne s'intéresse pas à la somme.

- $P_3(x) = 2x^2 + 99x + 29$

On a $P > 0$ (car $P = \frac{29}{2}$).

Les deux racines sont donc de même signe.

On s'intéresse ensuite à la somme.

On a $S < 0$ (car $S = -\frac{99}{2}$).

Les deux racines de $P_3(x)$ sont donc toutes les deux strictement négatives.

Le 16 septembre 2021

geos   metron : géométrie

mesure de la terre

Polynômes du second degré (révisions)

I. Forme canonique d'un polynôme du second degré

$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$)

f est une fonction polynôme.
$f(x)$ est un polynôme du second degré en x (ou expression polynomiale du second degré en x).

1°) Exemples

On applique une technique « artisanale » qui consiste à faire apparaître une identité remarquable.

Cette méthode impose une certaine gymnastique intellectuelle à laquelle il faut s'habituer.

① $f : x \mapsto x^2 - 2x + 3$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x^2 - 2x + 1) - 1 + 3$ (parenthèses d'isolation)

$= (x-1)^2 + 2$

② $f : x \mapsto 2x^2 - 4x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2(x^2 - 2x) + 1$

$= 2\left[(x-1)^2 - 1\right] + 1$

$= 2(x-1)^2 - 1$

On peut vérifier en utilisant le site dcode.

2°) Forme canonique dans le cas général

$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$)

$f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
Cette forme s'appelle forme canonique $f(x)$.

Avec les notations précédentes, on a $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Le mot canonique vient du latin *cano, canonis* qui signifie la règle.

On évite d'appliquer la formule dans des exemples numériques simples.

Application : maximum et minimum

La forme canonique permet de « lire » le maximum ou le minimum de f.

- Si $a > 0$, alors f admet un **minimum global** (ou absolu) sur $\mathbb{R}$ atteint en α.
- Si $a < 0$, alors f admet un **maximum global** (ou absolu) sur $\mathbb{R}$ atteint en α.

Dans les deux cas, cet extremum est égal à β.

On retiendra que la forme canonique permet de lire le maximum ou le minimum d'une fonction polynôme du second degré.

Cette propriété sera revue plus loin avec les variations d'une fonction polynôme du second degré.

3°) Discriminant

Définition :

On appelle **discriminant** du polynôme le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

La forme canonique de $f(x)$ s'écrit $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

II. Racines et factorisation

1°) Définition

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont appelées les **racines** (ou les **zéros**) du polynôme $f(x)$.

On veillera à bien faire la différence entre le polynôme $f(x)$ et l'équation $f(x) = 0$.

2°) Exemple

$f : x \mapsto x^2 + 3x - 4$

1 est une racine évidente (ou un zéro évident) de $f(x)$.

Vérifier en utilisant le site dcode.

3°) Propriété (racines et factorisation éventuelle)

$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$)

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

On s'intéresse aux racines de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$.
Il y a 3 cas selon le signe de Δ.

1^er^ cas : $\boxed{\Delta>0}$ Le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

De plus, $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2^e^ cas : $\boxed{\Delta=0}$ Le polynôme admet 1 racine double dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

De plus, $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=a(x-x_0)^2$.

3^e^ cas : $\boxed{\Delta<0}$ Le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, il n'existe pas de factorisation de $f(x)$ en produit de facteurs du premier degré.

On peut retenir les équivalences fondamentales suivantes pour l'équation $ax^2+bx+c=0\quad(\mathrm{E})$.

(E) admet deux racines réelles $\Leftrightarrow\ \Delta>0$

(E) admet une seule racine réelle $\Leftrightarrow\ \Delta=0$

(E) n'admet aucune racine réelle $\Leftrightarrow\ \Delta<0$

Δ et racines : On applique les formules en situation.

Le terme de racine double mérite d'être expliqué. Il s'agit en fait d'observer que lorsque $\Delta=0$, les formules des racines données dans le cas $\Delta>0$ fournissent $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$. Les deux racines sont confondues.

4°) Condition nécessaire à connaître

Si $ac<0$, alors (E) admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$ puisque le discriminant est strictement positif de manière évidente.

5°) Cas particuliers

• Lorsque $c=0$, on factorise immédiatement le polynôme en facteurs du premier degré.
En effet, $f(x)=ax^2+bx$ donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=x(ax+b)$.

Les racines apparaissent aussi immédiatement : 0 et $-\dfrac{b}{a}$.

• Lorsque $b=0$, on voit immédiatement si le polynôme est factorisable (au sens de factorisable en produit de deux polynômes du premier degré).

En effet, $f(x)=ax^2+c$ donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=a\left(x^2+\dfrac{c}{a}\right)$.

Le polynôme est factorisable si et seulement si $\dfrac{c}{a}<0$, c'est-à-dire si et seulement si a et c sont de signes contraires.

Dans les deux cas, on dit qu'il s'agit d'un polynôme incomplet.

III. Discriminant réduit

$f: x\mapsto ax^2+bx+c$ (a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$)

On pose $b'=\dfrac{b}{2}$ de sorte que $b=2b'$.

On a alors $f(x)=ax^2+2b'x+c$.

On pose $\Delta'=b'^2-ac$ (de sorte que $\Delta=4\Delta'$).

1^er^ cas : $\boxed{\Delta'>0}$ Le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.

2^e^ cas : $\boxed{\Delta'=0}$ Le polynôme admet 1 racine double dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\dfrac{b'}{a}$.

3^e^ cas : $\boxed{\Delta'<0}$ Le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

Le discriminant réduit intervient quand b est pair.

Exemple d'utilisation du discriminant réduit :

Déterminer les racines réelles du polynôme $P(x)=x^2-2x-1$.

Les zéros ou les racines du polynôme sont $x_1=1-\sqrt{2}$ et $x_2=1+\sqrt{2}$ (déterminées à l'aide du discriminant réduit).

On vérifie à l'aide de la calculatrice.

Utilisation :

Si b est pair, on calcule Δ'.

Si b est impair, on calcule Δ.

Méthode générale de résolution d'une équation du second degré :

- On regarde d'abord si on peut la mettre sous la forme d'une équation produit nul (identité remarquable, factorisation, cas particuliers).
- Sinon, on écrit l'équation sous la forme $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ et on cherche des racines évidentes (1, – 1, 2, – 2 etc.).
- En dehors de ces deux cas, on calcule le discriminant ou le discriminant réduit. On applique ensuite les formules prêtes à l'emploi.

IV. Somme et produit des racines

$f(x)=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$

On suppose que $\Delta\geqslant 0$.

Le polynôme $f(x)$ admet deux racines x_1 et x_2 distinctes ou confondues dans $\mathbb{R}$.

On a : $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

Les applications de ces formules sont assez nombreuses :
- recherche de racines évidentes
- recherche de l'autre racine quand on connaît déjà une racine
- signe des racines sans les « calculer ».

On notera que 1 est racine évidente de $f(x)$ si et seulement si $a+b+c=0$ c'est-à-dire si et seulement si la somme des coefficients est nulle.
Cette propriété reste valable pour un polynôme de degré quelconque.

Les racines évidentes sont à chercher dans l'ensemble $\{1\,;-1\,;2\,;-2\}$.

V. Signe d'un polynôme du second degré

$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

1^er^ cas : $\boxed{\Delta>0}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		Signe de a	0	Signe contraire de a	0	Signe de a	

2^e^ cas : $\boxed{\Delta=0}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

2^e^ cas : $\boxed{\Delta<0}$

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		Signe de a	

Application pratique :
Il est conseillé de faire des vérifications en utilisant des valeurs tests.
Par exemple, pour $x=0$, $f(0)=c$.
On regarde le signe de c.

Le 17 octobre 2021

Test valeur de ax^2+bx+c valeur de c

VI. Équations et inéquations avec changement d'inconnue

1°) Exemples

Dans un certain nombre de cas, on peut se ramener à des équations ou à des inéquations du second degré grâce un changement d'inconnue judicieux.

$3\cos^2 x-\cos x-2=0$ On posera $X=\cos x$. L'équation s'écrit alors $3X^2-X-2=0$.

$\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2-\dfrac{3x}{x+1}+1=0$ On posera $X=\dfrac{x}{x+1}$. L'équation s'écrit alors $X^2-3X+1=0$.

2°) Cas particulier des équations et inéquations bicarrées

On appelle équation bicarrée une équation de la forme $ax^4+bx^2+c=0$ où a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$.
Le polynôme ax^4+bx^2+c est un polynôme de degré 4 appelé polynôme bicarré.

Dans ce cas, on pose toujours $X=x^2$.
L'équation s'écrit alors $aX^2+bX+c=0$.

On procède de même pour les inéquations bicarrées.

3°) Cas particulier des équations et inéquations avec des valeurs absolues

Dans le cas d'une équation de la forme $a|x|^2+bx+c=0$ où a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$, on effectue le changement d'inconnue $X=|x|$.
L'équation s'écrit alors $aX^2+bX+c=0$.

On procède de même pour les inéquations avec valeur absolue.

VII. Recherche de deux réels connaissant la somme et le produit

On cherche deux réels dont la somme vaut S et le produit vaut P.

Les deux réels, s'ils existent, sont les zéros / racines du polynôme x^2-Sx+P.

VIII. Variations d'une fonction polynôme du second degré

$f: x\mapsto ax^2+bx+c$ (a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$)

On reprend les notations $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$ (on a aussi $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}$). On rappelle que la forme canonique s'écrit $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$.

Variations
2 cas

$\boxed{a>0}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$ $\searrow$	β	$\nearrow$ $+\infty$

$\boxed{a<0}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$ $\nearrow$	β	$\searrow$ $-\infty$

Les variations peuvent s'obtenir directement de manière assez simple à l'aide de la forme canonique ou à l'aide de la dérivation.

On complète avec les limites à savoir par cœur :

$\boxed{a>0}$

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$

$\boxed{a<0}$

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$

La flèche $\longrightarrow$ (sans talon) est la flèche « tend vers » à ne pas confondre avec la flèche $\longmapsto$ (avec talon) qui est la flèche « a pour image ».

Conséquence :

On retrouve la propriété de l'extremum d'une fonction polynôme du second degré mentionnée lors de l'étude de la forme canonique.

Propriété (extremum d'une fonction polynôme du second degré)

• Si $a>0$, alors f admet un **minimum global** (ou absolu) sur $\mathbb{R}$ atteint en α (et pas de maximum).

• Si $a<0$, alors f admet un **maximum global** (ou absolu) sur $\mathbb{R}$ atteint en α (et pas de minimum).

Dans les deux cas, cet extremum est égal à $\beta\left[=f(\alpha)\right]$.

IX. Représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

On reprend les notations du paragraphe **VIII** avec $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ (a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$), $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$ (on a aussi $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}$).

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère.

$\mathcal{C}$ est la courbe d'équation $y=ax^2+bx+c$.

$\mathcal{C}$ est une parabole de sommet $S(\alpha\,;\beta)$ tournée vers le haut si $a>0$ et tournée vers le bas lorsque $a<0$.

Les paraboles sont des courbes qui dont partie de la famille des coniques.
Les coniques ont été découvertes par les mathématiciens grecs de l'Antiquité.
On parlait de « sections coniques ».
Il s'agit des paraboles, des hyperboles et des ellipses.
On peut les faire apparaître avec un faisceau lumineux.
Elles interviennent aussi dans les mouvements des planètes (trajectoires paraboliques, elliptiques, hyperboliques).
$\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale en S (car $f'(\alpha)=0$).
Sur un graphique, cela se traduit par la forme arrondie au sommet de la parabole.
On peut d'ailleurs tracer cette tangente à l'aide de la forme conventionnelle sous forme d'une double flèche.
Lorsque le repère est orthogonal, $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x=\alpha$ pour axe de symétrie.

On peut noter que les coordonnées de S sont $\left(-\dfrac{b}{2a}\,;-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ (il est parfois utile de connaître l'ordonnée de S sous la forme $-\dfrac{\Delta}{4a}$).

• On applique les formules du cours.

• On peut aussi calculer la dérivée de la fonction $x\mapsto 3x-x^2$.
L'abscisse du sommet est la valeur d'annulation de la dérivée.

• On évite de passer par la forme canonique (perte de temps).

La parabole à deux branches paraboliques (une en $-\infty$, l'autre en $+\infty$).

Les deux branches sont tournées vers le haut ou vers le bas suivant le signe de a.

Appendice : Équations et inéquations de base liées à la fonction « carré »

1°) Règle

a est un réel strictement positif fixé.

$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ **ou** $x = -\sqrt{a}$

$x^2 \leqslant a \Leftrightarrow -\sqrt{a} \leqslant x \leqslant \sqrt{a}$

$x^2 \geqslant a \Leftrightarrow x \leqslant -\sqrt{a}$ **ou** $x \geqslant \sqrt{a}$

2 approches possibles : algébrique ou graphique.

2°) Rappel de la définition de la racine carrée d'un réel

a est un réel positif ou nul.
La racine carrée de a est l'unique réel x positif ou nul tel que $x^2 = a$.
Ce réel est noté $\sqrt{a}$.

Par exemple, la racine carrée de 9 est 3 ($\sqrt{9} = 3$).

Le 28 octobre 2020

Déterminer dans chaque cas le maximum et le minimum (M. Huet, à Tours, cours particulier Angelina Perroux).

$\mathrm{A} = x^2 + 4x + 5$; $\mathrm{B} = -x^2 + 2x + 2$; $\mathrm{C} = 4x^2 - 4x + 1$; $\mathrm{D} = -x^2 - 1$; $\mathrm{E} = x^2 - 2x - 1$; $\mathrm{F} = -x^2 + 2x - 1$

Source de cet exercice $\boxed{12}$: DS Côme Gaillard 23-9-2017 Saint-Jean de Béthune (avec d'autres questions).

$\boxed{12}$ exercice non fait en 2020-2021 mais que j'aurais bien aimé faire

Le $\boxed{13}$ exercice écrit le 18-11-2020.

$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$)

On reprend les notations $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\beta\left[= f(\alpha)\right]$.

$x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad (a \neq 0)$

Variations
2 cas

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	β	$\nearrow$

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	β	$\searrow$

Rappel :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta \qquad (a \neq 0)$$

Rappel :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta \qquad (a \neq 0)$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$

3°) **Représentation graphique**

$f : x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta \qquad (a \neq 0)$

Le 14-9-2020

J'avais noté lors du cours avec Steeven Béraud élève de 1ère spécialité au lycée Hoche les exercices suivants qu'il avait à faire.

Ex. p. 23 N°33 a) et b), N°97, N°100, N°113

$\begin{cases} x+y=20 \\ xy=51 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x+y=-7 \\ xy=21 \end{cases}$ $\qquad$ $X^2-20X+51$

N°97 10 cm et 20 cm^2

Source exercice avec la somme S et le produit P : Livre Déclic 1ère spécialité p. 23 noté le 14-9-2020.

1			**2**	$S=9$ et $P=30$
3	$S=-4$ et $P=-21$		**4**	$S=4$ et $P=-46$
5	$S=72$ et $P=1296$		**6**	$S=17$ et $P=50$
7	$S=27$ et $P=50$		**8**	$S=-\dfrac{3}{4}$ et $P=-\dfrac{5}{2}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta \text{ avec } \alpha=-\frac{b}{2a} \text{ et } \beta=f(\alpha)}$$

Caractérisation d'un disque :

2°) Compléter l'équivalence suivante où M un point quelconque de *P*, de coordonnées $(x\,;y)$.

$$\mathrm{M} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow x^2+y^2 \leqslant 4$$

ou

$$\mathrm{M} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2$$

ou

$$\mathrm{M} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow x^2+y^2-4 \leqslant 0$$

On attend une réponse utilisant les coordonnées *x* et *y*.

On utilise la caractérisation sous forme d'une inéquation d'un disque fermé de centre $\mathrm{A}(a\,;b)$ et de rayon $R>0$.

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant R^2$$

On peut aussi écrire $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leqslant R$.

Cette inéquation traduit en coordonnées la condition $\mathrm{AM} \leqslant R$.

On applique ce résultat avec $a=0$ et $b=0$ puisque le centre de $\mathcal{D}$ est le point O, origine du repère.

Le 14 septembre 2021

$\boxed{7}$ Méthode du système à éviter

$\boxed{15}$ rédigé le dimanche 17 octobre 2021

VI. Équations et inéquations avec changement d'inconnue (écrit le 3-12-2020)

Exercice douze avec erreur

$\Delta = m^2-(m+2)(-m+1)$

$\Delta = m^2+(m+2)(m-1)$

$\Delta = 2m^2+m-2$

Δ est un polynôme du second degré en *m*.

Le 11-9-2022

Complément sur l'exercice avec la famille de paraboles : J'ai tapé sur Google « Lieu géométrique des sommets des paraboles passant par deux points »
On démontre qu'il s'agit d'une hyperbole.
On devrait préciser son axe.

Le 13 septembre 2022

On parle de « zéro ».

Le 14 septembre 2022

On considère l'équation $ax^2+bx+c=0$ (E) où *a*, *b*, *c* sont trois réels tels que $a \neq 0$.

On suppose que le discriminant de (E) est positif ou nul.

On note x_1 et x_2 les racines de (E).

On pose $\mathrm{A}={x_1}^2+{x_2}^2$.

1°) En utilisant les expressions de x_1 et x_2 en fonction de *a*, *b*, *c*, exprimer A en fonction de *a*, *b*, *c*.

2°) En utilisant l'égalité $\mathrm{A}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, exprimer A en fonction de *a*, *b*, *c*.

Le 2 octobre 2022

Exercice TD 2 thomas Blanc ECG

On admet que les polynômes de degré deux suivants ont un discriminant positif. Déterminer, pour chaque polynôme, le signe de ses racines. $P1(x) = -x\ 2 + 12x - 32$ $P2(x) = 7x\ 2 + 21x - 13$ $P3(x) = 2x\ 2 + 99x + 29$