T experts

Devoir pour le mercredi 10 mars 2021

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….. **Note : ….. / 20**

Partie 1

Soit n, m, p trois entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
Soit A et B deux matrice rectangulaires à coefficients réels telles que :
A ait n lignes et m colonnes ;
B ait m lignes et p colonnes.

Expliquer pourquoi les produits AB et ${}^{t}\mathrm{B}\,{}^{t}\mathrm{A}$ sont possibles.

………

………

………

………

On pose $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ et $\mathrm{D} = {}^{t}\mathrm{B}\,{}^{t}\mathrm{A}$.
Préciser les dimensions de C et D.

………

………

………

………

On admet que ${}^{t}\mathrm{C} = \mathrm{D}$ c'est-à-dire que ${}^{t}(\mathrm{AB}) = {}^{t}\mathrm{B}\,{}^{t}\mathrm{A}$.

Partie 2

Soit n et m deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
On considère une matrice A à n lignes et m colonnes dont tous les coefficients sont des réels.

1°) Justifier que le produit ${}^{t}\mathrm{AA}$ est possible.

………

………

………

………

On pose $\mathrm{X} = {}^{t}\mathrm{AA}$.
Démontrer que X est une matrice symétrique.
Indication : Utiliser le résultat énoncé à la fin de la partie 1. On rappelle qu'une matrice est dite symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée.

………

………

………

………

2°) Pour tout couple $(i,\ j)$ d'entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$, on note $a_{i,\,j}$ le coefficient de A situé sur la i-ième ligne et dans la j-ième colonne.
Pour tout entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant m$, on note x_i le coefficient de X situé sur la i-ième ligne et dans la i-ième colonne.
Donner l'expression de x_i sous la forme d'une somme.

……………………………………………… (une seule égalité sans justifier)

Compléter, pour i fixé entre 1 et m, l'équivalence suivante :

$x_i = 0 \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………………

Corrigé du devoir pour le 10-3-2021

Partie 1

Soit n, m, p trois entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
Soit A et B deux matrice rectangulaires à coefficients réels telles que :
A ait n lignes et m colonnes ;
B ait m lignes et p colonnes.

Expliquer pourquoi les produits AB et ${}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$ sont possibles.

La matrice A a pour format (n, m) et la matrice B a pour format (m, p).
Le produit AB est possible car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Le produit ${}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$ est possible car le nombre de colonnes de ${}^t\mathrm{B}$ est égal au nombre de lignes de ${}^t\mathrm{A}$.

On pose $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ et $\mathrm{D} = {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$.
Préciser les dimensions de C et D.

La matrice A a pour format (n, m) et la matrice B a pour format (m, p).
On en déduit que C a pour format (n, p).

On démontre de même que D a pour format (p, n).

On admet que ${}^t\mathrm{C} = \mathrm{D}$ c'est-à-dire que ${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$.

Cette formule se démontre aisément en utilisant la définition du produit de deux matrices.

Partie 2

Soit n et m deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
On considère une matrice A à n lignes et m colonnes dont tous les coefficients sont des réels.

1°) Justifier que le produit ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$ est possible.

Par définition de la transposée d'une matrice, ${}^t\mathrm{A}$ a m lignes et n colonnes.
Le nombre de colonnes de ${}^t\mathrm{A}$ étant égal au nombre de lignes de A, on peut affirme que le produit ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$ est possible.

On pose $\mathrm{X} = {}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$.
Démontrer que X est une matrice symétrique.
Indication : Utiliser le résultat énoncé à la fin de la partie 1. On rappelle qu'une matrice est dite symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée.

On calcule ${}^t\mathrm{X}$.

$${}^t\mathrm{X} = {}^t\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\right)$$

$$= {}^t\mathrm{A}\,{}^t\left({}^t\mathrm{A}\right)$$

$$= {}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$$

$$= \mathrm{X}$$

Ainsi, X est une matrice symétrique.

2°) Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$, on note $a_{i,j}$ le coefficient de A situé sur la i-ième ligne et dans la j-ième colonne.
Pour tout entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant m$, on note x_i le coefficient de X situé sur la i-ième ligne et dans la i-ième colonne.
Donner l'expression de x_i sous la forme d'une somme.

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} \left(a_{k,i}\right)^2 \quad \text{(une seule égalité sans justifier)}$$

Compléter, pour i fixé entre 1 et m, l'équivalence suivante :

$$x_i = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1\,;n]\!] \quad a_{k,i} = 0$$

Attention, l'équivalence est vraie car tous les coefficients de A sont des réels.

$$x_i = 0 \Leftrightarrow \text{tous les coefficients de la colonne } i \text{ de A sont nuls}$$