T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 24 septembre 2021

Durée : 30 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………..……………………………….

Note : ….. / 20

Chercher les exercices **I** et **II** au brouillon.
Écrire sur les lignes ci-dessous la résolution complète (avec la rédaction) de l'un des deux exercices au choix et écrire l'ensemble des solutions de l'autre sans explication. On pourra séparer en deux colonnes.

I. (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{x-1}{x}$ (1).

II. (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{e^{x^2+1}}{\left(e^{2x}\right)^2}<1$ (2).

……..

……..

……..

……..

……..

……..

III. (2 points)

On note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x+1$ dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Quelles sont les coordonnées de son sommet S ? …………………… (une seule réponse)

IV. (2 points)

Déterminer la forme canonique du polynôme $P(x)=x^2+4x-1$.

……..

……..

……..

V. (6 points : 1°) 3 points + 1 point ; 2°) 2 points)

On considère l'équation $(m-2)x^2-4mx+m+2=0$ (E) où m est un réel distinct de 2.

1°) Calculer le discriminant réduit Δ'_m de (E) en fonction de m.

En déduire que pour tout réel $m \neq 2$, (E) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ (on justifiera par une seule phrase).

………..

………..

………..

2°) On note A et B respectivement la somme et le produit des racines de (E).

Exprimer A et B en fonction de m.

…………………… (une seule égalité) …………………… (une seule égalité)

Question bonus sur 1 point à rédiger sur une feuille à part :

Déterminer une relation entre A et B indépendante de m. On rédigera sur une feuille à part.

VI. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

Démontrer que f admet un maximum global sur $\mathbb{R}$, que l'on déterminera, sans utiliser la dérivée (ni les variations de f sur $\mathbb{R}$).

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 24-9-2021

Chercher les exercices **I** et **II** au brouillon.
Écrire sur les lignes ci-dessous la résolution complète (avec la rédaction) de l'un des deux exercices au choix et écrire l'ensemble des solutions de l'autre sans explication. On pourra séparer en deux colonnes.

I.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{x-1}{x}$ (1).

II.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{e^{x^2+1}}{\left(e^{2x}\right)^2}<1$ (2).

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{x-1}{x}$ (1).

On observe que 0 et 1 sont valeurs interdites.

On résout donc (1) dans $\mathbb{R}\setminus\{0\,;1\}$.

$(1) \Leftrightarrow 2x=(x-1)^2$ (produit en croix)

$\Leftrightarrow 2x=x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow x^2-4x+1=0$

On considère le polynôme x^2-4x+1.

On calcule le discriminant réduit : $\Delta'=(-2)^2-1=3$.

$\Delta'>0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$.

Ces deux racines sont différentes de 0 et 1.

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=\left\{2-\sqrt{3}\,;2+\sqrt{3}\right\}$

On effectue une vérification grâce à la calculatrice.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{e^{x^2+1}}{\left(e^{2x}\right)^2}<1$ (2).

$$(2) \Leftrightarrow \frac{e^{x^2+1}}{e^{4x}} < 1$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2+1-4x} < 1$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2+1-4x} < e^0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 < 0$$

On considère le polynôme $x^2 - 4x + 1$ (déjà considéré dans le **I**).

On calcule le discriminant réduit : $\Delta' = (-2)^2 - 1 = 3$.

$\Delta' > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$.

On applique ensuite la règle du signe d'un polynôme du second degré (éventuellement en faisant un tableau de signes).

$$(2) \Leftrightarrow 2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2 = \left]2-\sqrt{3}\,;\,2+\sqrt{3}\right[$$

On effectue une vérification grâce à la calculatrice.

III.

On note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$ dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Quelles sont les coordonnées de son sommet S ? $\mathrm{S}\left(3\,;-\frac{7}{2}\right)$ (une seule réponse)

IV.

Déterminer la forme canonique du polynôme $P(x) = x^2 + 4x - 1$.

On utilise les deux premiers termes du polynôme pour faire apparaître une identité remarquable (pas de formule).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = x^2 + 4x - 1$$

$$= (x+2)^2 - 4 - 1$$

$$= (x+2)^2 - 5$$

V.

On considère l'équation $(m-2)x^2-4mx+m+2=0 \quad (\text{E})$ où m est un réel distinct de 2.

1°) Calculer le discriminant réduit Δ'_m de (E) en fonction de m.

En déduire que pour tout réel $m \neq 2$, (E) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ (on justifiera par une seule phrase).

$$\Delta'_m = (-2m)^2-(m-2)(m+2)$$

$$= 4m^2-(m^2-4)$$

$$= 3m^2+4$$

$\forall m \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \quad \Delta'_m > 0$ donc pour tout réel $m \neq 2$, (E) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

L'expression de ces racines en fonction de m n'est pas demandée.

2°) On note A et B respectivement la somme et le produit des racines de (E).

Exprimer A et B en fonction de m.

$\text{A} = \dfrac{4m}{m-2}$ (une seule égalité) $\qquad\qquad$ $\text{B} = \dfrac{m+2}{m-2}$ (une seule égalité)

Question bonus sur 1 point à rédiger sur une feuille à part :

Déterminer une relation entre A et B indépendante de m. On rédigera sur une feuille à part.

Il s'agit d'éliminer m entre les deux égalités.

1[ère] méthode :

On observe que A et B sont des expressions homographiques de m.

On va commencer par les écrire sous forme canonique.

$$\text{A} = \frac{4m}{m-2} = \frac{4(m-2)+8}{m-2} = 4+\frac{8}{m-2} \text{ et } \text{B} = \frac{m+2}{m-2} = \frac{(m-2)+4}{m-2} = 1+\frac{4}{m-2}.$$

Il est facile ensuite de trouver une combinaison linéaire de A et B à coefficients non nuls qui permette d'éliminer les m.

Il suffit de multiplier A par 1 (ce qui revient à ne rien faire) et B par 2 puis à soustraire.

On obtient $\text{A}-2\text{B} = 4+\dfrac{8}{m-2}-2\left(1+\dfrac{4}{m-2}\right) = 2$.

2[e] méthode :

On exprime m en fonction de A puis l'on reporte l'expression obtenue dans celle de B.

$\text{A} = \dfrac{4m}{m-2}$ donne $(m-2)\text{A} = 4m$ d'où $m\text{A}-4m = 2\text{A}$ soit $m(\text{A}-4) = 2\text{A}$ d'où $m = \dfrac{2\text{A}}{\text{A}-4}$.

On reporte ensuite cette expression de m dans celle de B.

$$B = \frac{m+2}{m-2}$$

$$= \frac{\frac{2A}{A-4}+2}{\frac{2A}{A-4}-2}$$

$$= \frac{\frac{2A+2A-8}{A-4}}{\frac{2A-2A+8}{A-4}}$$

$$= \frac{\frac{4A-8}{A-4}}{\frac{8}{A-4}}$$

$$= \frac{4A-8}{8}$$

$$= \frac{A-2}{2}$$

La dernière égalité donne $2B = A - 2$ par produit en croix et l'on retrouve bien la relation obtenue avec la première méthode.

VI.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

Démontrer que f admet un maximum global sur $\mathbb{R}$, que l'on déterminera, sans utiliser la dérivée (ni les variations de f sur $\mathbb{R}$).

> Attention, f n'est pas une fonction polynôme du second degré donc on ne peut pas appliquer la propriété du cours sur les extremums d'une fonction polynôme du second degré.

On raisonne en deux temps.

1. On démontre que f est majorée sur $\mathbb{R}$ et on trouve un majorant (le meilleur possible !).
2. On démontre que ce majorant est atteint.

On procède par inégalités successives.

1. On part de $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant 0$.

En multipliant les deux membres de cette inégalité par – 1, on obtient $\forall x \in \mathbb{R} \quad -x^2 \leqslant 0$.

Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x^2} \leqslant e^0$ soit $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant 1$.

On a donc démontré que f est majorée sur $\mathbb{R}$ et que 1 est un majorant.

2. On observe que $f(0)=1$.

On en déduit que f admet 1 pour maximum global sur $\mathbb{R}$, atteint pour $x=0$.

On peut aussi résoudre l'équation $f(x)=1$ ce qui montrera que 0 est la seule valeur en laquelle le maximum est atteint.

Rappel de la définition d'une fonction majorée, minorée, bornée

f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.

● On dit que f est **majorée** sur D pour exprimer qu'il existe un réel M tel que $\forall x \in D \quad f(x) \leqslant M$ (M est un **majorant** de la fonction).
● On dit que f est **minorée** sur D pour exprimer qu'il existe un réel m tel que $\forall x \in D \quad f(x) \geqslant m$ (m est un **minorant** de la fonction).
● On dit que f est **bornée** pour exprimer qu'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in D \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$.