T experts

Devoir pour le lundi 8 novembre 2021

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………….……………………………

Note : ….. / 20

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\dfrac{z+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}z}=2-3\mathrm{i}$ $\quad(1)$ et $(z+\mathrm{i})^2+\mathrm{i}\bar{z}+1=0$ $\quad(2)$.

Vérifier en utilisant le site dcode (on tapera conj(z) pour le conjugué de z).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du devoir pour le 8-11-2021

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{z+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}z}=2-3\mathrm{i} \quad (1)$.

On résout (1) dans $\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}$ (valeur interdite déterminée grâce à la résolution de la petite équation $1+\mathrm{i}z=0$).

$(1) \Leftrightarrow z+\mathrm{i}=(2-3\mathrm{i})(1+\mathrm{i}z)$

$\Leftrightarrow z+\mathrm{i}=(2-3\mathrm{i})\times 1+(2-3\mathrm{i})\times \mathrm{i}z$ (on évite de tout développer « bêtement »)

$\Leftrightarrow z+\mathrm{i}=2-3\mathrm{i}+(2-3\mathrm{i})\times \mathrm{i}z$

$\Leftrightarrow z+\mathrm{i}=2-3\mathrm{i}+(2\mathrm{i}+3)z$

$\Leftrightarrow 4\mathrm{i}-2=(2\mathrm{i}+3)z-z$

$\Leftrightarrow 4\mathrm{i}-2=(2\mathrm{i}+2)z$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{4\mathrm{i}-2}{2\mathrm{i}+2}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{(4\mathrm{i}-2)(2-2\mathrm{i})}{(2+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{12\mathrm{i}+4}{8}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{2}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

On a $S_1=\left\{\dfrac{1+3\mathrm{i}}{2}\right\}$.

On vérifie avec le site dcode.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+\mathrm{i})^2+\mathrm{i}\overline{z}+1=0 \quad (2)$.

On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels.
On a alors $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$.

$(2) \Leftrightarrow z^2+2\mathrm{i}z-1+\mathrm{i}\overline{z}+1=0$

$\Leftrightarrow z^2+2\mathrm{i}z+\mathrm{i}\overline{z}=0$

$\Leftrightarrow (x+\mathrm{i}y)^2+2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)+\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)=0$

$\Leftrightarrow x^2+2\mathrm{i}xy-y^2+2\mathrm{i}x-2y+\mathrm{i}x+y=0$

$\Leftrightarrow x^2-y^2-y+2\mathrm{i}(2xy+3x)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-y=0 & (3) \\ 2xy+3x=0 & (4) \end{cases}$ [par identification des partie réelle et imaginaire]

On obtient un système de deux équations à deux inconnues qui n'est pas linéaire.

On « prend » l'équation (4). On trouve soit y soit x. On remplace dans l'équation (3).

$(4) \Leftrightarrow x(2y+3)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $y=-\dfrac{3}{2}$ (règle d'un produit de facteurs, c'est bien un « ou »)

1[er] **cas :** $x=0$

Dans ce cas, l'équation (3) donne $0^2-y^2-y=0 \quad (3')$.

$(3') \Leftrightarrow -y(y+1)=0$

$\Leftrightarrow y=0$ ou $y=-1$

Il y a donc deux solutions pour l'équation (2) pour $x=0$: 0 et $-\mathrm{i}$.

2^e^ cas : $y=-\frac{3}{2}$

Dans ce cas, l'équation (3) donne $x^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}=0 \quad (3")$.

$$(3") \Leftrightarrow x^2-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-\frac{3}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il y a donc deux solutions de (2) pour $y=-\frac{3}{2}$: $\frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{2}$ et $\frac{-\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{2}$.

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

On a $S_2=\left\{0\,;-\mathrm{i}\,;\frac{\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{2}\,;\frac{-\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{2}\right\}$.

On vérifie avec dcode.