T spécialité

Contrôle du jeudi 27 mai 2021

Durée : 50 minutes
- Fiche autorisée
- Calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………..………………………………

Note : ….. / 20

I. (4 points)

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$. On note I le milieu de $[\mathrm{BC}]$.
On suppose que A et I ne sont pas confondus.
Déterminer l'ensemble F des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = 0$.
On rédigera avec soin.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

Dans les exercices **II** et **III**, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère le plan P d'équation cartésienne $2x - 2y + z - 4 = 0$.
1°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de P avec l'axe des abscisses.

……..

2°) Calculer la distance du point $\mathrm{B}(1\,;1\,;-3)$ à P.

……..

III. (5 points : 1°) 3 points ; 2 points)

Pour tout réel m, on note S_m l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient $x^2+y^2+z^2-2mx-2my-2mz+3=0$.

1°) Déterminer l'ensemble F des réels m tels que S_m soit une sphère.

Dans ce cas, déterminer les coordonnées de son centre Ω_m et son rayon r_m en fonction de m.

2°) Déterminer l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit F.

………..

………..

………..

………..

………..

IV. (6 points : 3 points chaque intégrale)

Calculer la valeur exacte des intégrales $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\ln 3} x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^3\ln x\,\mathrm{d}x$.

On ne détaillera sur les lignes ci-dessous que le calcul de l'une des intégrales au choix.

………..

………..

………..

………..

………..

V. (2 points)

On considère la fonction $\mathrm{F}: x \mapsto \displaystyle\int_3^x \frac{\mathrm{e}^t}{|t|+1}\,\mathrm{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

Calculer $\mathrm{F}'(x)$ sans justifier.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x)=$…………………

Corrigé du contrôle du 27-5-2021

I.

Soit A, B, C trois points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$. On note I le milieu de $[\mathrm{BC}]$.
On suppose que A et I ne sont pas confondus.
Déterminer l'ensemble F des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = 0$.
On rédigera avec soin.

Comme I est le milieu de $[\mathrm{BC}]$, $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$.

$\mathrm{M} \in F \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\right) = 0$ (car I est le milieu de $[\mathrm{BC}]$, voir encadré ci-dessus)

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MI}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MI}} = 0$ (on s'arrête là, il n'y a pas besoin d'aller plus loin)

On reconnaît un lieu géométrique classique (orthogonalité de deux vecteurs).

Comme A et I ne sont pas confondus par hypothèse, F est la sphère de diamètre $[\mathrm{AI}]$.

Dans les exercices **II** et **III**, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

II.

On considère le plan P d'équation cartésienne $2x - 2y + z - 4 = 0$.

1°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de P avec l'axe des abscisses.

$\mathrm{A} \in (\mathrm{O}x)$ donc $y_{\mathrm{A}} = 0$ et $z_{\mathrm{A}} = 0$.

$\mathrm{A} \in P$ donc $2x_{\mathrm{A}} - 2y_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{A}} - 4 = 0$ d'où $2x_{\mathrm{A}} - 2 \times 0 + 0 - 4 = 0$ soit $2x_{\mathrm{A}} - 4 = 0$ donc $x_{\mathrm{A}} = 2$.

On en déduit que le point A a pour coordonnées $(2\,;0\,;0)$.

2°) Calculer la distance du point $B(1;1;-3)$ à P.

On applique la formule de distance d'un point à un plan directement en situation.

$$\mathrm{d}(B, P)=\frac{|2-2-3-4|}{\sqrt{4+4+1}}$$

$$=\frac{7}{\sqrt{9}}$$

$$=\frac{7}{3}$$

III.

Pour tout réel m, on note S_m l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient $x^2+y^2+z^2-2mx-2my-2mz+3=0$.

1°) Déterminer l'ensemble F des réels m tels que S_m soit une sphère.
Dans ce cas, déterminer les coordonnées de son centre Ω_m et son rayon r_m en fonction de m.

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$$\mathrm{M}\in S_m \Leftrightarrow (x-m)^2+(y-m)^2+(z-m)^2-3m^2+3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2+(y-m)^2+(z-m)^2=3(m^2-1)$$

Pour que S_m soit une sphère, il faut et il suffit que $m^2-1>0$ soit $m<-1$ ou $m>1$. On a donc $F=]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$.

Pour $m\in F$, S_m est $\boxed{\text{la}}$ sphère de centre $\Omega_m(m\,;m\,;m)$ et de rayon $r_m=\sqrt{3m^2-3}$.

La question aurait pu être posée ainsi : Quelle est la nature de S_m ?

Dans ce cas, il faut faire une discussion.

Pour déterminer la nature de S_m, on doit s'intéresser au signe de m^2-1 (essentiel).
Le signe de m^2-1 dépend de la position de m par rapport à 1 et – 1 (on peut éventuellement faire un tableau de signes).

- Si $m\in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$, alors S_m est $\boxed{\text{la}}$ sphère de centre $\Omega_m(m\,;m\,;m)$ et de rayon $r_m=\sqrt{3m^2-3}$.

- Si $m=1$ ou $m=-1$, alors S_m est un singleton (ensemble constitué d'un seul élément).

- Si $m\in]-1\,;1[$, alors S_m est l'ensemble vide (on peut écrire $S_m=\varnothing$).

2°) Déterminer l'ensemble des points Ω_m lorsque *m* décrit *F*.

On doit déterminer l'ensemble des points Ω_m lorsque *m* décrit *F*.

On a $\begin{cases} x_{\Omega_m} = m \\ y_{\Omega_m} = m \\ z_{\Omega_m} = m \end{cases}$ avec $m \in F$.

On reconnaît un système d'équations paramétriques de droite.

Or $F =]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$.

On note A le point de coordonnées $(1\,;1\,;1)$ et B le point de coordonnées $(-1\,;-1\,;-1)$.

L'ensemble des points Ω_m lorsque *m* décrit *F* est la droite (AB) privée du segment $[\mathrm{AB}]$ (cet ensemble se note $(\mathrm{AB})\setminus[\mathrm{AB}]$).
Il s'agit donc de la réunion de deux demi-droites ouvertes d'origines A et B.

IV.

Calculer la valeur exacte des intégrales $\mathrm{I} = \int_0^{\ln 3} x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_1^{\mathrm{e}} x^3 \ln x\,\mathrm{d}x$.
On ne détaillera sur les lignes ci-dessous que le calcul de l'une des intégrales au choix.

Dans les deux cas, on utilise la formule d'intégration par parties.

Calcul de I :

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$.
On a alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$.

$$\mathrm{I}=\left[\;x\times\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\;\right]_0^{\ln 3}-\int_0^{\ln 3}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\;\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\ln 3\times\mathrm{e}^{2\ln 3}}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\ln 3}\mathrm{e}^{2x}\;\mathrm{d}x$$

$$=\frac{9\ln 3}{2}-\frac{1}{2}\left[\;\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\;\right]_0^{\ln 3}$$

$$=\frac{9\ln 3}{2}-\frac{1}{4}\left[\;\mathrm{e}^{2x}\;\right]_0^{\ln 3}$$

$$=\frac{9\ln 3}{2}-\frac{\mathrm{e}^{2\ln 3}-\mathrm{e}^{0}}{4}$$

$$=\frac{9\ln 3}{2}-\frac{9-1}{4}$$

$$=\frac{9\ln 3}{2}-2$$

Calcul de J :

On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x^3$.

On a alors $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=\dfrac{x^4}{4}$.

$$\mathrm{J}=\left[\ln x\times\frac{x^4}{4}\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}\;\times\frac{x^4}{4}\;\mathrm{d}x$$

$$=\ln\mathrm{e}\times\frac{\mathrm{e}^4}{4}-\ln 1\times\frac{1^4}{4}-\frac{1}{4}\int_1^{\mathrm{e}}x^3\;\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mathrm{e}^4}{4}-0-\frac{1}{4}\int_1^{\mathrm{e}}x^3\;\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mathrm{e}^4}{4}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^{\mathrm{e}}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^4}{4}-\frac{\left[x^4\right]_1^{\mathrm{e}}}{16}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^4}{4}-\frac{\mathrm{e}^4-1}{16}$$

$$=\frac{3\mathrm{e}^4+1}{16}$$

On vérifie les résultats à l’aide de la calculatrice (valeurs approchées).

V.

On considère la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_3^x \frac{\mathrm{e}^t}{|\,t\,|+1}\ \mathrm{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

Calculer $\mathrm{F}'(x)$ sans justifier.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{|\,x\,|+1}$$

Considérons la fonction $u : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{|\,t\,|+1}$.

La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, celle du dénominateur ne s'annulant pas).

De plus, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_3^x u(t)\ \mathrm{d}t$.

D'après le théorème du cours, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = u(x)$ soit $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{|\,x\,|+1}$.

On peut dire que F est la primitive de u qui s'annule en 3.