T exp — Éléments de théorie des graphes

Lélia Blin Algorithmique des graphes

La théorie des graphes est née des préoccupations qui n’étaient pas directement des préoccupations mathématiques.

Les graphes capturent essentiellement une relation binaire entre deux éléments.
Il existe une arête entre u et v si il existe une relation binaire entre u et v.

Relation binaire

Une relation peut dans la vie courante lier des objets divers :

Relation binaire symétrique :
Pierre connaît Jean.
Pierre est marié avec Martine.
Il existe une route à double sens entre Lyon et Grenoble.

Relation asymétrique :
Pierre est plus grand que Jean.
Pierre est client de Jean.
Il existe une route à sens unique entre Lyon et Grenoble.

Historique

Plus récemment (60,70) vision plus unifiée
des concepts
des objets
des résultats obtenus

Les graphes sont devenus une branche des mathématiques discrètes.

Développement des ordinateurs

Problématique de la manipulation automatique de telles structures

Algorithmique des graphes

Claude Berge, né le 5 juin 1926 à Paris et mort dans cette même ville le 30 juin 2002, est un mathématicien et artiste français.

On voit les graphes en 2e dans le cadre des cours de SNT (réseaux sociaux) et en 3e (réseaux d’ordinateurs).

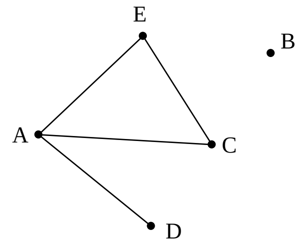
I. Vocabulaire général et premières propriétés

Définition

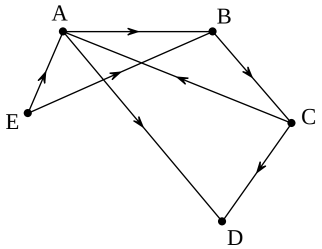
Un **graphe d’ordre *n*** (*n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 2) est un ensemble de *n* points reliés entre eux. Ces points sont appelés **sommets**.

Il y a 2 types de graphes :

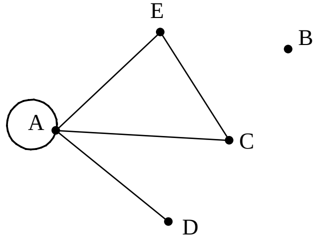
- les **graphes non orientés**, dans lesquels les sommets sont reliés entre eux par des lignes : les **arêtes**.



- les **graphes orientés**, dans lesquels les sommets sont reliés par des flèches : les **arcs**.



Dans les deux cas, un sommet peut être relié à lui-même par une **boucle**.



En pratique, les arêtes ou les arcs expriment des relations.

Deux sommets peuvent être reliés par une ou plusieurs arêtes ou arcs.

Il s’agit donc d’un concept très simple et d’un outil de modélisation très général, utile dans de nombreux domaines.

• Par exemple une carte routière peut être modélisée par un graphe : les villes sont les sommets et on reliera deux sommets par un trait si et seulement si les villes qu'ils représentent ont une route les connectant directement.

• Un réseau social est un autre exemple : les utilisateurs sont les sommets et on reliera deux utilisateurs si et seulement s'ils sont chacun ami avec l'autre.

À noter que la disposition des sommets (position dans l'espace) n’a pas d'importance, ni même la forme des arêtes reliant éventuellement ces sommets (ligne droite, courbe etc). La seule chose qui compte est la relation entre les sommets.

Définition [sommet adjacent à un autre]

Un sommet est **adjacent** à un autre si ces sommets sont reliés entre eux.

Définition [sommet isolé]

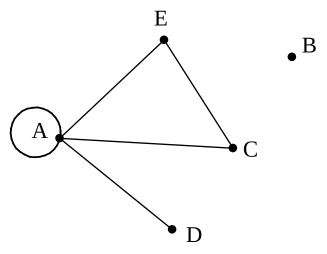
Un sommet est dit **isolé** s’il n’est adjacent à aucun autre sommet.

Nous allons introduire une notion importante, la notion de degré d’un sommet dans le cas d’un graphe non orienté.

Définition [degré d’un sommet]

Le **degré d’un sommet** d’un graphe non orienté est le nombre d’arêtes auxquelles il est relié (les boucles comptant 2 fois car elles partent du sommet et arrivent vers le sommet).

Exemple :



Le degré de A est égal à 5 (la boucle compte pour 2). On écrit $\deg \mathrm{A} = 5$.
Le degré de B est égal à 0. On écrit $\deg \mathrm{B} = 0$.
Le degré de C est égal à 2. On écrit $\deg \mathrm{C} = 2$.
Le degré de D est égal à 1. On écrit $\deg \mathrm{D} = 1$.
Le degré de E est égal à 2. On écrit $\deg \mathrm{E} = 2$.

Propriété (« lemme des poignées de mains »)

Dans un graphe non orienté, la somme des degrés de chaque sommet est égale au double du nombre d’arêtes.

Exemple :

On reprend le graphe de l’exemple précédent.

$\deg \mathrm{A} + \deg \mathrm{B} + \deg \mathrm{C} + \deg \mathrm{D} + \deg \mathrm{E} = 5 + 0 + 2 + 1 + 2 = 10$

Le nombre d’arêtes est égal à 5.

On vérifie sur cet exemple que la somme des degrés des sommets est bien égale au double du nombre d’arêtes.

Démonstration :

Lorsqu’on fait la somme des degrés des sommets, on compte chaque arête deux fois. En effet, chaque arête $\{x,y\}$ sera comptabilisée une première fois lorsqu’on considère le degré du sommet x, et une deuxième fois lorsqu’on rajoute le degré de y. Cette somme correspond ainsi au double du nombre d’arêtes dans le graphe et il s’agit donc d’un nombre pair.

Conséquence :

La somme des degrés d’un graphe (non orienté) est toujours paire.

D’autres propriétés très simples portant sur les degrés des sommets peuvent être démontrées. Un autre exemple est donné après la définition d’un graphe simple.

Graphe simple

Définition [graphe simple]

On dit qu’un graphe non orienté G est **simple** si deux sommets sont reliés par au plus une arête et s’il est sans boucle.

Propriété :

Dans tout graphe simple non orienté d’ordre $n \geqslant 2$, il existe au moins deux sommets distincts de même degré.

Démonstration :

Considérons un graphe quelconque G non orienté simple d'ordre $n \geqslant 2$ (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1, c'est le nombre de sommets de G).
Le degré de chaque sommet est donc un nombre à choisir dans l'ensemble $E = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ puisque chaque sommet ne peut être relié qu'à au plus $n-1$ autres sommets.
Si tous les degrés sont différents, étant donné que E contient n valeurs et que le graphe comporte n sommets, il doit nécessairement exister un sommet de degré y pour chaque y dans l'ensemble E.
Il existe donc un sommet de degré 0 qui n'est relié à aucun autre sommet.
Il existe aussi un sommet de degré $n-1$ qui est relié à tous les autres sommets.
Mais ceci est en fait une contradiction puisque le sommet de degré $n-1$ ne peut pas être relié au sommet de degré 0 (qui n'est relié à aucun autre sommet).

La propriété est fausse si le graphe n'est pas simple.
On peut prendre l'exemple d'un graphe non orienté d'ordre 2 dont les sommets notés A et B sont tels que A est relié à lui-même par une boucle et A est relié à B par une arête.
Le degré de A est alors égal à A ; le degré de B est égal à 2.
Les deux sommets n'ont donc pas le même degré.

Graphe complet

Définition [graphe complet]

On dit qu'un graphe simple non orienté G est **complet** s'il n'admet pas de boucle et si deux sommets quelconques sont reliés par une arête.

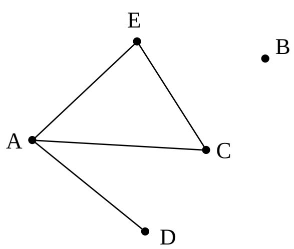
II. Parcours sur un graphe

1°) Chaînes et chemins

• Dans un graphe non orienté, une **chaîne de longueur *p*** où p est un entier naturel supérieur ou égal à 1, est une succession de p arêtes telles que l'extrémité de chacune est l'origine de la suivante.

Si l'origine de la première arête et l'extrémité de la dernière coïncident, la chaîne est dite **fermée**.
Si la chaîne fermée est composée d'arêtes distinctes, il s'agit alors d'un **cycle**.

Exemples de chaînes dans un graphe non orienté



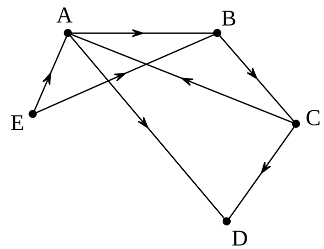
La chaîne A-C-E-A-D est une chaîne de longueur 4 reliant les sommets A et D.

La chaîne est A-C-E fermée. C'et un cycle car les arêtes qui la composent sont deux à deux distinctes.

• Dans un graphe orienté, on parle de **chemin** pour les chaînes et de **circuit** pour les **cycles**.

Un circuit est un chemin fermé dont les arcs sont tous distincts.

Exemples de chemins dans un graphe orienté



Le chemin A → B → C → D est un chemin de longueur 3 reliant le sommet A au sommet D.

La chemin A → B → C → A est un cycle (les arêtes qui la composent sont deux à deux distinctes).

fredptitgars.net/informatique/rcp101-recherche-operationnelle-et-aide-a-la-decision/Generalites-sur-les-graphes

Le chemin A → C → B → A → E est un chemin de longueur … reliant les sommets A et E.

2°) Vocabulaire complémentaire

• **Chaîne élémentaire :** On ne rencontre pas deux fois le même sommet en la parcourant.

Un chemin est dit élémentaire s'il ne passe pas deux fois par le même sommet

• **Chaîne simple :** On ne rencontre pas deux fois le même arc en la parcourant.

III. Matrice d'adjacence

1°) Définition [matrice d'adjacence]

Soit G un graphe fini d'ordre n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On suppose que les sommets sont numérotés de 1 à n.
On appelle **matrice d'adjacence** de G la matrice M carrée d'ordre n telle que le coefficient $m_{i,j}$ situé sur la ligne i et dans la colonne j est égal au nombre d'arêtes qui relie le sommet i au sommet j (en tenant compte de l'orientation sur les arêtes si G est orienté).

On retiendra que :

- pour un graphe non orienté, $m_{i,j} =$ nombre d'arêtes entre les sommets i et j ;

- pour un graphe orienté, $m_{i,j} =$ nombre d'arêtes reliant les sommets i et j dans le sens de i vers j.

Le coefficient $m_{i,\,j}$ est un entier naturel éventuellement nul (il vaut 0 lorsqu'il n'existe aucune arête qui relie le sommet *i* au sommet *j*).

2°) Propriétés

- La matrice d'adjacence d'un graphe est une matrice dont tous les coefficients sont des entiers naturels.

- Dans le cas particulier d'un graphe non orienté, la matrice d'adjacence est symétrique.

- Dans le cas particulier d'un graphe simple, la matrice d'adjacence est formée de 0 ou de 1.

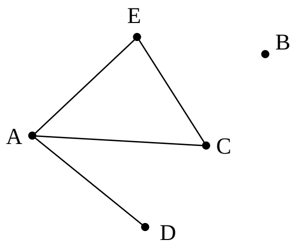
On retiendra que, pour un graphe simple, la matrice d'adjacence est booléenne.
On retiendra que, avec les notations de la définition, que si G est un graphe simple, les coefficients de M sont égaux à 1 ou à 0.

- Dans le cas particulier d'un graphe complet d'ordre n, la matrice d'adjacence est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 sauf ceux de la diagonale sont égaux à 0.

3°) Exemples

On reprend les deux exemples du paragraphe **I**.

Exemple 1 :



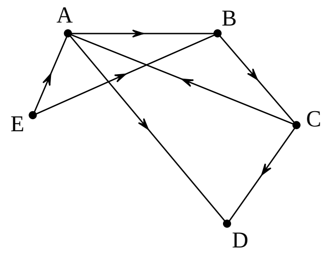
La matrice d'adjacence de ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique est la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique car le graphe est non orienté.

On remarque que la deuxième ligne et la deuxième colonne sont remplies de 0 ce qui est normal puisque le sommet B n'est relié à aucun sommet (c'est un sommet isolé).

Exemple 2 :



La matrice d'adjacence de ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique est la matrice

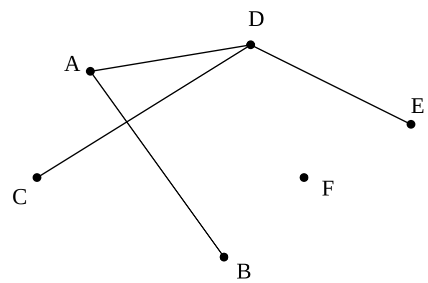
$$\mathrm{M} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Cette matrice n'est pas symétrique car le graphe est orienté.

Autre exemple :

On considère le graphe G d'ordre 6 ci-dessous.

Il s'agit d'un graphe non orienté.



La matrice d'adjacence de G est :

$$\mathrm{M} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut retrouver le degré d'un sommet à partir de la matrice d'adjacence. Pour un graphe non orienté ne comportant pas de boucle (M n'a pas d'éléments diagonaux), il suffit de faire la somme des coefficients sur la ligne (ou sur la colonne) correspondant au sommet. Au cas de boucle, le coefficient de la diagonale correspondant doit être multiplié par 2.

Pour un graphe non orienté, la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice d'adjacence est égale au degré du sommet correspondant à la ligne (idem pour les colonnes).

Pour un graphe orienté, la somme des coefficients de la matrice d'adjacence est égale au nombre d'arêtes.
Pour un graphe orienté, la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice d'adjacence est égale au nombre d'arêtes partant du sommet correspondant à la ligne.

4°) Propriété fondamentale (nombre de chemins de longueur donnée)

Soit G un graphe fini d'ordre n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On suppose que les sommets sont numérotés de 1 à n.
On note M la matrice d'adjacence de G.
Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, le coefficient de M^p situé sur la ligne i et dans la colonne j est égal au nombre de chaînes de longueur p allant du sommet i au sommet j (en tenant compte de l'orientation sur les arêtes si G est orienté).

Idée de la démonstration :

On considère un graphe d'ordre 4 dont les sommets sont S_1, S_2, S_3, S_4.
Cherchons à exprimer les chaînes de longueur 2 à l'aide de chaînes de longueur 1 : pour aller de S_1 à S_3 en deux étapes, par exemple, il faut pouvoir aller de S_1 à un sommet quelconque S_i du graphe, puis de ce sommet à S_3. Il s'agit donc de dénombrer, pour tout i allant de 1 à 4, les arêtes d'origine S_1 et d'extrémité S_i et celles d'origine S_i et d'extrémité S_3.
Pour un i donné, le produit de ces deux nombres sera le nombre de chaînes de longueur 2, d'origine S_1 et d'extrémité S_3, passant par S_i.
La somme des nombres obtenus en faisant varier i de 1 à 4 est exactement le nombre de chaînes de longueur 2, d'origine S_1 et d'extrémité S_3.

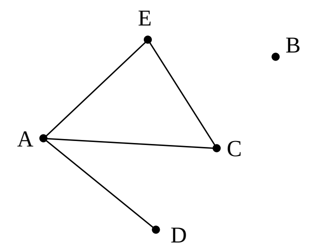
Si l'on note ce nombre $a_{1,3}$, on a : $a_{1,3} = \sum_{i=1}^{i=4} m_{1,i}m_{i,3} = m_{1,1}m_{1,3} + m_{1,2}m_{2,3} + m_{1,3}m_{3,3} + m_{1,4}m_{4,3}$.

On reconnaît la formule de calcul du terme de la première ligne, troisième colonne, de la matrice $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M} \times \mathrm{M}$.

On peut passer aux chemins de longueur 3.

La démonstration dans le cas général se fait en utilisant un raisonnement par récurrence.
La démonstration de ce théorème peut être admise comme généralisation intuitive du raisonnement fait plus haut. Le programme ne demande pas de démonstration de ce résultat.

Exemple 1 :



$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice M est symétrique. Toutes ses puissances le sont aussi (résultat admis sans démonstration).

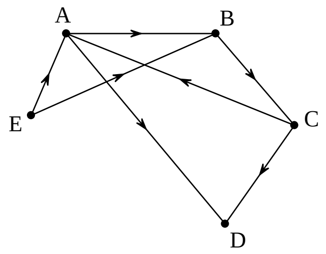
Cherchons le nombre de chemins de longueur 3 reliant les sommets A et C.

On considère la matrice M^3 et l'on cherche le coefficient situé sur la $1^{\text{ère}}$ ligne et dans la 3^{e} colonne (ou sur la 3^{e} ligne et dans la $1^{\text{ère}}$ colonne, puisque la matrice est symétrique).
Il y a 4 chemins de longueur 3 reliant les sommets A et C : A-E-A-C ; A-D-A-C ; A-C-A-C ; A-C-E-C.

Il y a 6 chaînes fermées de longueur 3 (somme des éléments de la diagonale de M^3).

Plus généralement, on pourra retenir que pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, la trace de M^p (c'est-à-dire la somme des coefficients situés sur la diagonale) est égal au nombre de chaînes fermées de longueur p.

Exemple 2 :



$$M=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0\end{pmatrix}\qquad M^3=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

5°) Propriété du carré de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté

Soit *G* un graphe fini non orienté d'ordre *n* où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On suppose que les sommets sont numérotés de 1 à *n*.
On note M la matrice d'adjacence de *G*.
Pour tout entier naturel *i* compris entre 1 et *n*, le coefficient de M^2 situé sur la ligne *i* et dans la colonne *i* est égal au degré du sommet *i*.

On retiendra que les coefficients de la diagonale principale du carré de la matrice d'adjacence sont les degrés des différents sommets.

Justification :

Le coefficient de M^2 situé sur la ligne *i* et dans la colonne *i* est égal au nombre de chaînes de longueur 2 allant du sommet *i* au sommet *i*.

6°) Propriété [nombre de chaînes de longueur inférieure ou égale à un entier donné]

Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, les coefficients de la matrice $L_p = M + ... + M^p$ donnent le nombre de chaînes entre deux sommets de *G* de longueur inférieure ou égale à *p*.

La propriété est valable aussi bien pour un graphe orienté que pour un graphe non orienté. On remplace le mot chaîne par le mot chemin.

IV. Distance entre deux sommets et diamètre d'un graphe

1°) Définitions et notations

Définitions [distance entre deux sommets]

La **distance** entre deux sommets distincts d'un graphe *G* non orienté est la longueur de la plus courte chaîne reliant ces deux sommets.
La distance entre deux sommets *x* et *y* de *G* est parfois notée $d_G(x, y)$.

Définitions [diamètre d'un graphe]

Le **diamètre** d'un graphe *G* non orienté est la plus longue distance entre deux sommets quelconques de *G*.
Le diamètre de *G* est parfois noté diam *G*.

2°) Remarques

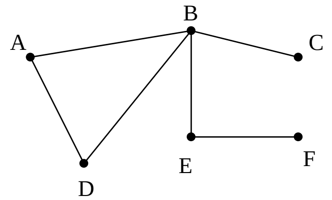
- La distance d'un sommet à lui-même est nulle.
- Par convention, la distance entre deux sommets qui ne peuvent être reliés par aucune chaîne est $+\infty$.
- Le diamètre d'un graphe complet est égal à 1.

3°) Cas d'un graphe orienté

Dans le cas d'un graphe orienté, il y a un ordre : distance de *x* à *y*, longueur du plus court chemin de *x* à *y*.
En général, on a $d_G(x, y) \neq d_G(y, x)$ (il n'y a pas de symétrie).

4°) Exemple

☐ Exemple 1 (graphe non orienté) :



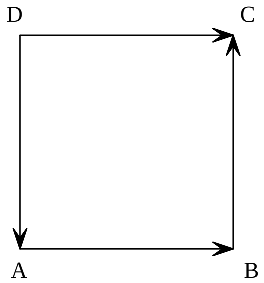
- La distance de D à E est 2.
- La distance de B à D est 1.
- La distance de A à A est 0.
- Le diamètre de ce graphe est 3 : c'est la distance de A à F ou la distance de D à F.

La plus courte chaîne entre A et F est A-B-E-F.
La plus courte chaîne entre D et F est D-B-E-F.

Il n'y a pas de notation particulière pour la distance entre deux sommets.
Il n'y a pas d'unité.

Pour déterminer le diamètre du graphe, on peut aussi dresser un tableau à double entrée des distances et chercher la plus grande longueur.

☐ Exemple 2 (graphe orienté) :

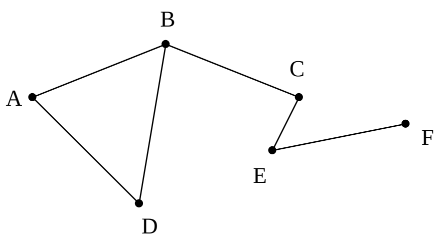


La distance de A à B est égale à 1.
La distance de B à A est égale à + ∞.
La distance de B à B est égale à + ∞.

Le 17 mai 2022

Nouveaux exemples avec notations.

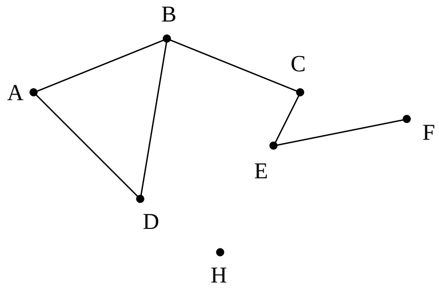
• On considère le graphe non orienté G ci-dessous :



$\mathrm{d}_G(\mathrm{D}, \mathrm{E}) = 2$

$\mathrm{d}_G(\mathrm{D}, \mathrm{D}) = 0$

• On considère le graphe non orienté G ci-dessous :



Par convention, on a $\mathrm{d}_G(\mathrm{D}, \mathrm{H}) = +\infty$ car il n'existe aucune chaîne reliant D à H.
Le sommet H est un sommet isolé du graphe.

Il existe des algorithmes permettant de déterminer les distances entre deux sommets d'un graphe.

5°) Propriété [majorant du diamètre d'un graphe non orienté connexe]

La définition d'un graphe non orienté connexe est donnée dans le paragraphe **V**. Il s'agit d'un graphe non orienté tel que deux sommets quelconques peuvent toujours être reliés par une chaîne.

Le diamètre d'un graphe G non orienté connexe d'ordre $n \geqslant 2$ est inférieur ou égal à $n-1$.

En effet, dans un graphe d'ordre n, la longueur d'une chaîne simple entre deux sommets distincts est inférieure ou égale à $n-1$.
La plus grande longueur possible d'une chaîne simple est $n-1$.

Le 17-5-2022

Dans un graphe non orienté d'ordre n, la longueur d'une chaîne simple entre deux sommets distincts est toujours inférieure ou égale à $n-1$.

Lemme :

Dans un graphe non orienté d'ordre n (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2), la distance entre deux sommets distincts est toujours inférieure ou égale à $n-1$.

$d_G(x\,;y) \leqslant n-1$

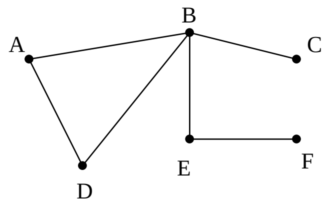
6°) Excentricité

Définition :

L'**excentricité** ou l'**écartement** d'un sommet d'un graphe est la distance maximale existant entre ce sommet et les autres sommets du graphe.

Lorsque le graphe n'est pas connexe, l'excentricité est infinie.

Exemple :



La distance maximale existant entre le sommet A et les autres sommets du graphe est de 3 (distance entre A et F). Nous pouvons donc dire que l'excentricité de A est de 3.

La distance maximale existant entre le sommet B et les autres sommets du graphe est de 3 (distance entre A et F. Nous pouvons donc dire que l'excentricité de B est de 2.

On peut faire un petit tableau.

Sommet	Excentricité
A	3
B	2
C	3
D	3
E	2
F	3

Centre :

On appelle **centre(s) d'un graphe** le(s) sommet(s) d'excentricité minimale

Le centre n'est pas nécessairement unique.

Exemple :

Dans le graphe précédent, les sommets A, C, D, F ont une excentricité de 3 ; les sommets B et E ont une excentricité de 2.

Les centres du graphe sont donc B et E.

Cas particulier :

Dans un graphe cyclique (c'est-à-dire ….), tous les sommets sont des centres.

Rayon :

On appelle **rayon** d'un graphe G l'excentricité d'un centre de G.

Exemple :

Le rayon du graphe est de 2.

Petit bilan de vocabulaire :

un sommet	graphe
excentricité	- rayon - diamètre - centre

V. Connexité

1°) Connexité dans les graphes non orientés

Définition [graphe non orienté connexe]

Un graphe G non orienté est dit **connexe** si on peut relier n'importe quelle paire de ses sommets par une chaîne.

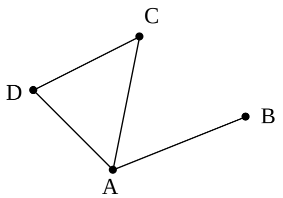
Remarques :

- Un graphe complet est nécessairement connexe. (Bien entendu, la réciproque est fausse).

- Le diamètre d'un graphe non connexe est égal à $+\infty$.
Pour un graphe G non connexe, on a $\text{diam}(G) = +\infty$.

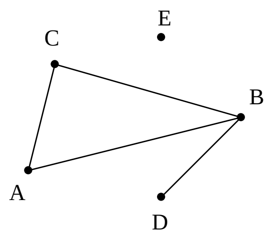
Exemple :

Le graphe ci-dessous est connexe.



Contre-exemple :

Le graphe ci-dessous n'est pas connexe.



2°) Connexité dans les graphes orientés

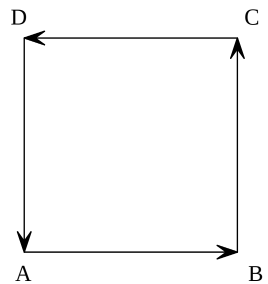
Définition [graphe orienté fortement connexe]

Un graphe orienté G est **fortement connexe** s'il existe un chemin du sommet a au sommet b et du sommet b au sommet a, quels que soient les sommets représentés par a et b dans le graphe.

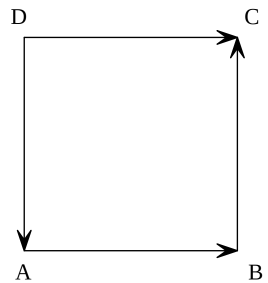
Définition [graphe orienté faiblement connexe]

Un graphe orienté G est **faiblement connexe** s'il y a une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets dans le graphe si l'on ne considère plus l'orientation des arcs.

Exemples :

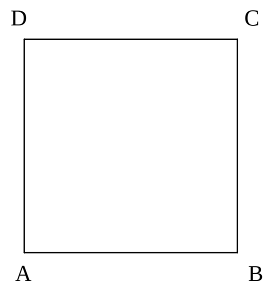


Graphe fortement connexe



Graphe non fortement connexe mais faiblement connexe.

Quand on supprime les sens (flèches), on obtient le graphe suivant carré non orienté qui est connexe.



7°) Propriété [condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe non orienté soit connexe]

Rappel de propriété :

Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, les coefficients de la matrice $\mathrm{L}_p = \mathrm{M} + ... + \mathrm{M}^p$ donnent le nombre de chaînes entre deux sommets de G de longueur inférieure ou égale à p.

La propriété est valable aussi bien pour un graphe orienté que pour un graphe non orienté.

Lemme :

Soit G un graphe non orienté d'ordre n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On suppose que les sommets sont numérotés de 1 à n.
On note M la matrice d'adjacence en prenant les sommets dans l'ordre 1, 2, …, n.
Soit i et j deux entiers naturels distincts tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) Il existe une chaîne entre les sommets i et j.
(b) Il existe un entier naturel p avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$ tel que le coefficient $(i\,;\,j)$ de la matrice M^p soit strictement positif.
(c) Le coefficient $(i\,;\,j)$ de la matrice $\mathrm{L}_{n-1} = \mathrm{M} + ... + \mathrm{M}^{n-1}$ est strictement positif.

À partir de ce lemme, on peut donner plusieurs propriétés.

Propriété 1 (conséquence immédiate du lemme) :

Soit G un graphe non orienté d'ordre n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note M la matrice d'adjacence en prenant les sommets dans un ordre fixé.
G est connexe si et seulement si tous les coefficients de la matrice $\mathrm{L}_{n-1} = \mathrm{M} + ... + \mathrm{M}^{n-1}$ sont strictement positifs, sauf éventuellement ceux de la diagonale qui peuvent être nuls.

Démonstration :

On raisonne en deux temps.

• On suppose d'abord G connexe et on numérote les sommets de 1 à n correspondant à l'ordre qui a été adopté pour écrire la matrice M. On note les sommets S_1, S_2, …, S_n.
Soit i et j deux entiers naturels quelconques compris entre 1 et n.
Comme G est connexe, il existe au moins une chaîne de longueur inférieure ou égale à $n-1$ qui relie les sommets S_i et S_j.
Or le nombre de chaînes qui relient les sommets S_i et S_j est donné par le coefficient de la matrice L_{n-1} situé sur la ligne i et dans la colonne j.
On en déduit que ce coefficient est un entier naturel non nul donc strictement positif.

• On suppose que tous les coefficients de la matrice $\mathrm{L}_{n-1} = \mathrm{M} + ... + \mathrm{M}^{n-1}$ sont strictement positifs.

Propriété 1' (conséquence immédiate de la précédente) :

Soit G un graphe non orienté d'ordre n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note M la matrice d'adjacence en prenant les sommets dans un ordre fixé.
On rappelle que, comme on avait vu dans le chapitre sur les matrices, I_n désigne la matrice identité d'ordre n, c'est-à-dire la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 0 sauf ceux de la diagonale qui valent 1.
G est connexe si et seulement si tous les coefficients de la matrice $\mathrm{I}_n + \mathrm{M} + ... + \mathrm{M}^{n-1}$ sont strictement positifs.

On peut remplacer I_n par n'importe quelle matrice carrée d'ordre n à coefficients strictement positifs sur la diagonale et nuls ailleurs.

Propriété 2 :

Soit G un graphe non orienté d'ordre n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note M la matrice d'adjacence en prenant les sommets dans un ordre fixé.
G est connexe si et seulement si tous les coefficients de la matrice $\left(\mathrm{I}_n + \mathrm{M}\right)^{n-1}$ sont strictement positifs.

La même propriété s'applique également pour reconnaître si un graphe orienté est fortement connexe ou non, ce qui n'est pas évident à première vue quand on donne le graphe.

VI. Chaîne eulérienne, cycle eulérien

Leonhard Euler (1701-1783)

Nous allons introduire les notions importantes de chaîne eulérienne et cycle eulérien dont nous verrons des applications concrètes.

Un camion de ramassage des ordures part du dépôt représenté en noir ci-dessous et doit passer sur chaque route du réseau ci-dessous pour effectuer la collecte des déchets.
Comment doit-il s'y prendre ?
On cherche ici un cycle eulérien.

Dans tout le paragraphe, on se place dans le cas de graphes non orientés.

1°) Vocabulaire

Chaîne eulérienne

Définition [chaîne eulérienne]

Soit G un graphe non orienté.
Une **chaîne eulérienne** est une chaîne de G qui contient une et une seule fois chaque arête de G.

Cycle eulérien

Définition [cycle eulérien]

Soit G un graphe non orienté.
Un **cycle eulérien** de G est une chaîne eulérienne de G qui est un cycle, c'est-à-dire une chaîne eulérienne dont les extrémités sont confondues.

Graphe eulérien

Définition [graphe eulérien]

Soit G un graphe non orienté.
On dit que G est un graphe **eulérien** lorsqu'il admet un cycle eulérien.

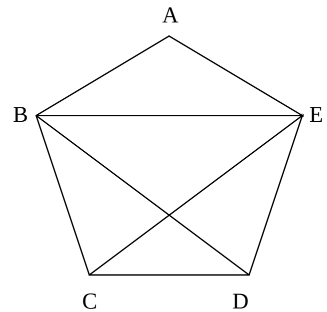
Graphe semi-eulérien

Définition [graphe semi-eulérien]

Soit G un graphe non orienté.
On dit que G est **semi-eulérien** si G admet une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien.

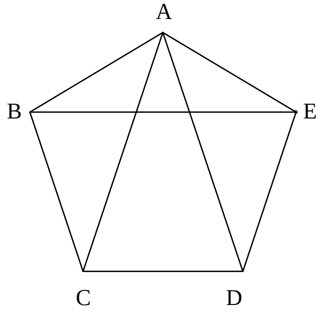
2°) Exemples

Graphe G_1

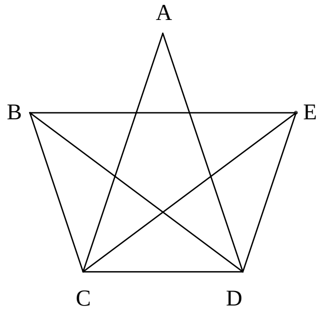


Ce graphe très célèbre s'appelle parfois « graphe de l'enveloppe » avec le problème où il s'agit d'effectuer le tracé sans lever le crayon.

Graphe G_2



Graphe G_3

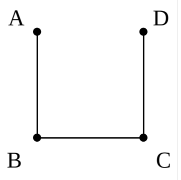


G_1 a une chaîne eulérienne : C-B-A-E-B-D-E-C-D.
G_1 n'a pas de cycle eulérien. G_1 n'est pas donc eulérien.
G_1 est semi-eulérien.
Il s'agit du problème du dessin de l'enveloppe (voir article Wikipedia).

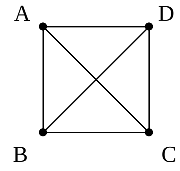
G_2 n'a pas de chaîne eulérienne.
G_2 n'a pas de cycle eulérien.
G_2 n'est donc ni eulérien ni semi-eulérien.

G_3 a plusieurs chaînes eulériennes et plusieurs cycles eulériens. Par exemple : A-C-E-A-B-D-E-B-C-D-A.
G_3 est donc eulérien.

Autres exemples : le 24-5-2022



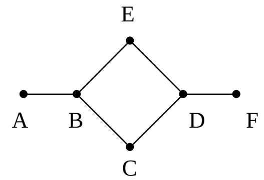
graphe semi-eulérien (on peut le tracer sans lever le crayon)

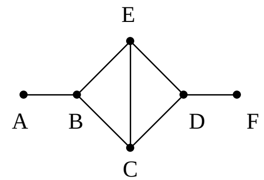


graphe non eulérien et non semi-eulérien (on ne peut pas le tracer sans lever le crayon)

Exemples donnés le 24 mai 2022 par Vicente Seixas :

Peut-on tracer ces graphes sans lever le crayon ?





Propriété [condition nécessaire pour qu'un graphe admette une chaîne eulérienne]

> Soit G un graphe non orienté.
> Si G admet une chaîne eulérienne, alors il est connexe.

Une condition nécessaire pour qu'un graphe non orienté G admette une chaîne eulérienne est qu'il soit connexe.

3°) Théorème d'Euler (admis sans démonstration)

On s'intéresse à un graphe non orienté connexe.
On s'intéresse plus particulièrement au nombre de sommets de degré impair.
On sait que dans un graphe non orienté, le nombre de sommets de degré impair est pair (0, 2, 4…).

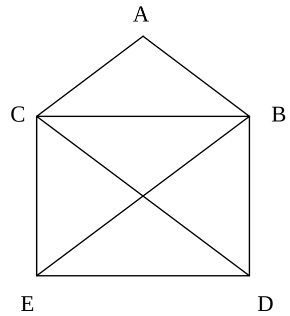
Le théorème suivant est très souvent utilisé dans les exercices pour déterminer si un graphe possède ou non une chaîne eulérienne :

Soit G un graphe non orienté connexe.

G admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de ses sommets de degré impair est 0 ou 2.
En particulier :
● Si le nombre de sommets de degré impair de G est 0 (c'est-à-dire qu'il n'y a aucun sommet de degré impair ou encore que tous les sommets sont de degré pair), alors G admet une chaîne eulérienne fermée, c'est-à-dire un cycle eulérien.
● Si le nombre de sommets de degré impair de G est 2, alors G admet une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien.
Dans tous les autres cas, G n'admet ni chaîne eulérienne, ni cycle eulérien.

Exemples :

① Graphe de la maison :



Il s'agit d'un graphe semi-eulérien.

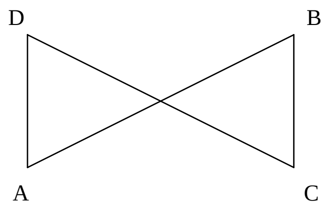
A(2) B(4) C(4) D(3) E(3)

On peut présenter les degrés des sommets dans un tableau.

sommet	A	B	C	D	E
degré	2	4	4	3	3

Il y a deux exactement 2 sommets de degré impair : il exsite donc une chaîne eulérienne ui permet de les relier.
Il n'existe en revanche pas de cycle eulérien.

② Graphe nœud papillon

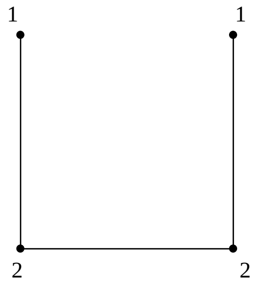


Il s'agit d'un graphe eulérien (cycle A-B-C-D-A).

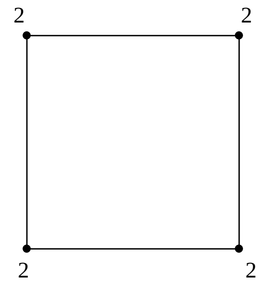
graphe eulérien
connexe
graphe semi-eulérien

Si un graphe possède une chaîne eulérienne, alors il suffit d'ajouter une arête entre les deux sommets de degré impair pour en faire un cycle eulérien et rendre ainsi le graphe eulérien.

Exemples :



Ce graphe possède une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien.



Ce graphe possède un cycle eulérien.

4°) Reprise des exemples

● Pour G_1, il y a 2 sommets de degré impair, à savoir C et D qui sont de degré 3. On peut donc affirmer qu'il existe une chaîne eulérienne entre ces sommets, par exemple C-B-A-E-B-D-C-E-D (il y en a plusieurs). Il n'existe en revanche pas de cycle eulérien.

● Pour G_2, il y a 4 sommets de degré impair. On peut donc affirmer qu'il n'existe pas de chaîne eulérienne ni, a fortiori, de cycle eulérien.

● Pour G_3, il n'y a aucun sommet de degré impair donc il existe un cycle eulérien.

Le corollaire suivant, conséquence immédiate du théorème, est souvent utile :

5°) Corollaire

Un graphe ayant plus de deux sommets impairs ne possède pas de chaîne eulérienne.

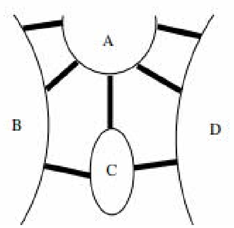
Ces résultats permettent de résoudre beaucoup de problèmes pratiques se traitant en théorie des graphes.

6°) Le graphe des ponts de Königsberg

Nous allons considérer le célèbre problème des ponts de Königsberg, étudié par le mathématicien Euler au XVIII^{e} siècle.

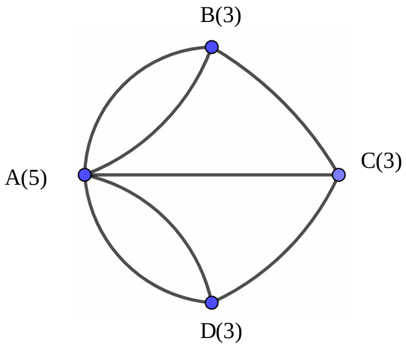
Le célèbre philosophe Emmanuel Kant habitait la ville de Königsberg au XVIII^{e} siècle, si bien qu'on le désigne parfois aujourd'hui comme le « philosophe de Königsberg » à la suite de Nietzsche.
On dit que, durant toute sa vie, Kant se promenait chaque jour dans la ville, sauf le jour de la Révolution française.

Le graphe associé au plan de la ville est donc le graphe suivant :



Le problème est de savoir s'il existe un chemin permettant d'emprunter une fois et une seule chaque pont.

On modélise la situation par le graphe ci-dessous.



Il ne s'agit pas d'un graphe simple.

Il s'agit d'un graphe d'ordre 4 dont les 4 sommets dont de degré impair. Il n'admet donc pas de chaîne eulérienne.

En 1943, il y a eu un bombardement qui a détruit un pont.

Le 2-9-2022

État actuel des ponts

Deux des sept ponts d'origine ont été détruits lors du bombardement de Königsberg pendant la Seconde Guerre mondiale. Deux autres ont été démolis par la suite. Ils ont été remplacés par une autoroute moderne. Les trois autres ponts subsistent, bien que seuls deux d'entre eux datent de l'époque d'Euler (l'un d'eux a été reconstruit en 1935). Ainsi, en 2000, il y avait cinq ponts à Kaliningrad.
En termes de théorie des graphes, deux des nœuds ont maintenant un degré 2, et les deux autres un degré 3. Par conséquent, un chemin eulérien est maintenant possible, mais comme il doit commencer sur une île et se terminer sur l'autre, il est peu pratique pour les touristes.

VII. Chemin hamiltonien, cycle hamiltonien, graphe hamiltonien

Dans tout le paragraphe, on se place dans le cas de graphes non orientés.

Tiré d'un cours sur les graphes à partir du roman *L'Agrapheur* :

Un voyageur de commerce part tous les matins de son domicile représenté en noir ci-dessous et doit rendre visite à un ensemble de clients représentés en blanc, puis retourner à son domicile.
Comment doit-il s'y prendre pour minimiser la distance totale parcourue ? (On suppose que les distances entre toutes les paires de clients ainsi qu'entre les clients et le domicile du voyageur de commerce sont connues).
On cherche ici un cycle hamiltonien de longueur minimale.

Supposons qu'une distance soit associée à chaque arête d'un graphe connexe. Le « problème du postier chinois » consiste à déterminer un cycle aussi court que possible qui passe au moins une fois par chaque arête du graphe.

Chaîne hamiltonienne

Définition :

Soit *G* un graphe non orienté.
Une chaîne est dite **hamiltonienne** si elle passe une fois et une seule par chaque sommet.

On parle aussi de **chemin hamiltonien** pour un graphe orienté.

C'est le problème du voyageur de commerce : il doit relier plusieurs points en partant de chez lui.
Il s'agit d'un problème important de mathématiques discrètes.

Cycle hamiltonien

Définition :

Un **cycle hamiltonien** est un chemin hamiltonien qui est un cycle.

Graphe hamiltonien

Définition :

Un **graphe hamiltonien** est un graphe possédant au moins un cycle passant par tous les sommets une fois et une seule.

Graphe semi-hamiltonien

Définition :

Un **graphe semi-hamiltonien** est un graphe possédant au moins une chaîne passant par tous les sommets une fois et une seule.

Remarques :

Un graphe hamiltonien ne doit pas être confondu avec un graphe eulérien, où l'on passe par toutes les arêtes une fois et une seule : dans un cycle hamiltonien, on peut très bien négliger de passer par certaines arêtes.

Un graphe peut être eulérien, hamiltonien, les deux à la fois, ou aucun des deux.

Le graphe papillon est un exemple de graphe eulérien mais pas hamiltonien.

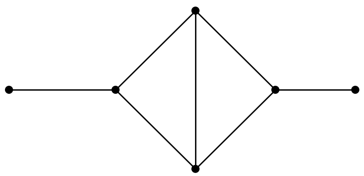
Un graphe hamiltonien (graphe des arêtes du dodécaèdre) avec un cycle hamiltonien (en rouge). Ce graphe n'est pas eulérien.

Il n'est pas facile en général de prouver qu'un graphe est hamiltonien ou qu'il ne l'est pas.

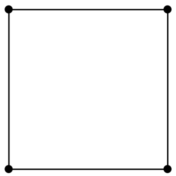
Les graphes hamiltoniens sont nommés d'après William Rowan Hamilton qui était astronome royal en Irlande, au milieu du XIX^{e} siècle. Celui-ci a inventé un jeu qu'il a nommé *icosian game*, qui consiste à trouver un cycle hamiltonien dans le graphe des arêtes du dodécaèdre. Hamilton a résolu ce problème à l'aide d'un nouveau type de calculs qu'il a appelé le *icosian calculus*, et que l'on décrirait de nos jours par des calculs dans un certain groupe non commutatif. Cette solution ne se généralise malheureusement pas à un graphe arbitraire.
Bien que ces graphes soient nommés d'après Hamilton, les cycles hamiltoniens dans les polyèdres avaient déjà été étudiés un an plus tôt par Thomas Kirkman.

Exemples :

① Le graphe ci-dessous est un graphe hamiltonien mais pas eulérien ni semi-eulérien.



② Le graphe carré ci-dessous est un graphe eulérien et hamiltonien.



VIII. Graphes valués ou pondérés - Parcours dans un graphe pondéré

Dans de nombreux domaines interviennent des graphes avec des coefficients positifs appelés poids.
L'exemple le plus parlant est celui d'un réseau routier entre plusieurs points.

1°) Vocabulaire

Définition [graphe valué ou pondéré]

Un graphe (orienté ou non) est **valué** ou **pondéré** lorsque ses arêtes sont affectées de nombres réels appelés **poids**.

On parle aussi de graphe **étiqueté**.

On verra plus tard dans le supérieur la notion de valuation d'un graphe.

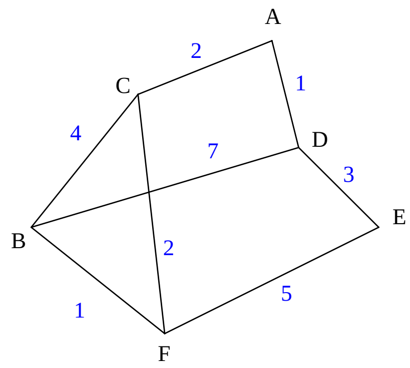
Les graphes probabilistes sont des graphes pondérés particuliers.

Définition [poids d'une chaîne]

Le **poids** d'une chaîne est la somme des poids des arêtes qui la composent.

2°) Exemple

On considère le graphe pondéré ci-dessous :



On envisage quelques chaînes reliant B à D.

La chaîne B-D est de poids 7.

La chaîne B-C-A-D est de poids $4+2+1=7$.

La chaîne B-F-E-D est de poids $1+5+3=9$.

La chaîne B-F-C-A-D est de poids $1+2+2+1=6$.

Cette chaîne est la chaîne de poids minimal reliant B à D.

3°) Remarque

Dans le cas de coefficients positifs ou nuls, on parle souvent de plus courte chaîne entre deux sommets au lieu de chaîne de poids minimal. En effet, les poids peuvent être assimilés à des distances.

Le problème de détermination d'une chaîne de poids minimal dans un graphe est un problème fondamental de mathématiques discrètes.

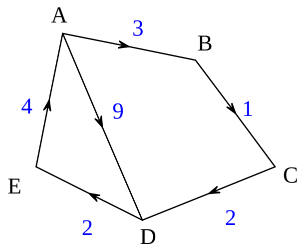
Il existe un algorithme pour déterminer la chaîne (ou le chemin) de poids minimal reliant deux sommets : l'algorithme de Moore-Dijkstra. Mais il est souvent plus rapide sur des graphes simples de le faire de façon artisanale.
Il s'agit d'un problème d'optimisation fondamental en mathématiques discrètes.

Edsger Dijkstra (1930-2002) est un mathématicien, physicien et informaticien hollandais.
Il a publié l'algorithme en 1959.

Edsger Wybe Dijkstra, né à Rotterdam le 11 mai 1930 et mort à Nuenen le 6 août 2002, est un mathématicien et informaticien néerlandais du XXe siècle. Il reçoit en 1972 le prix Turing pour ses contributions sur la science et l'art des langages de programmation et au langage Algol. Juste avant sa mort, en 2002, il reçoit le prix PoDC de l'article influent, pour ses travaux sur l'autostabilisation.

Le problème est aussi valable pour les graphes pondérés. Le mot « chaîne » est remplacé par le mot « chemin ».

Exemple :



Le poids du chemin A-B-C-D est égal à $3+1+2=6$.

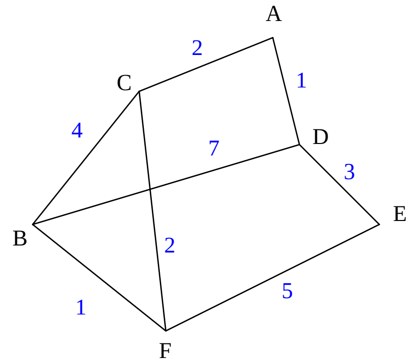
Le chemin de poids minimal entre A et E est A-B-C-D-E ; il est de poids $3+1+2+2=8$.

4°) Algorithme de Dijkstra

L'algorithme de Dijkstra a pour but de trouver la chaîne ou le chemin de poids minimal entre deux sommets d'un graphe pondéré.
Nous allons le présenter dans le cas de graphes non orientés pondérés par des poids positifs.
Il fonctionne également pour des graphes orientés.
Dans le cas de poids négatifs, il peut ne pas y avoir de chaîne de poids minimal (voir document perso.liris.cnrs.fr « Quelques rappels de théorie des graphes »).

Exemple 1 (sans retour en arrière) :

On considère le graphe non orienté pondéré suivant.



On cherche le chemin de B à D ayant un poids minimal.

Étape	Points sélectionnés	Chemins créés
0	B	
1	B, F	B-F
2	B, F, C	B-F-C
3	B, F, C, A	B-F-C-A
4	B, F, C, A, D	B-F-C-A-D

① On regarde les arêtes de poids minimal partant de B.

B-F → 1 B-D → 7 B-C → 4

On retient la chaîne B-F.

② On regarde les arêtes de poids minimal partant de F et de B, à l'exception de l'arête B-F déjà créée.

B-D → 7 B-C → 4 F-C → 2 F-E → 5
On retient le chemin F-C. On a donc la chaîne B-F-C.

③ On regarde les arêtes de poids minimal partant de B, F, C, à l'exception des arêtes déjà considérées.

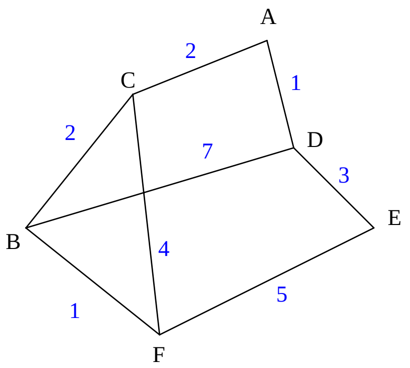
C-B → 4 C-A → 2 F-E → 5 B-D → 7 B-C → 4
On retient l'arête C-A. On a donc la chaîne B-F-C-A.

④ On regarde les arêtes de poids minimal partant de B, F, C, A.

A-D → 3 C-B → 4 F-E → 5 B-D → 7 B-C → 4
On retient l'arête A-D.
On a donc la chaîne B-F-C-A-D. C'est la première chaîne à être complétée et est donc la chaîne de poids minimal entre B et D.

Exemple 2 (avec retour en arrière) :

On reprend le graphe précédent, mais on modifie le poids de l'arête joignant B et C (passe au poids 2) et de l'arête joignant C et F (passe au poids 4).



On cherche toujours le chemin de poids minimal entre B et D.

On sélectionne B.

Étape	Points sélectionnés	Chemins créés
0	B	
1	B, F	B-F
2	B, F, C	B-F B-C
3	B, F, C, A	B-F B-C-A
4	B, F, C, A, D	B-F B-C-A-D

On commence l'algorithme en sélectionnant le point B, on regarde tous les chemins partant de B.
Le chemin B-F étant le plus court, on sélectionne le point B et on crée le chemin B-F.
À l'étape suivante, on regarde donc les chemins partant de B et F. Le plus court est B-C, on crée donc un nouveau chemin partant de B.
Ensuite, le chemin le plus court est C-A donc on complète le chemin B-C.
Le chemin le plus court est donc le premier à être complété.

Il existe une présentation en tableau de l'algorithme de Dikjstra.

Il est possible de rédiger l'algorithme de Dikjstra en langage naturel et de le programmer en langage informatique.

IX. Coloration d'un graphe

Les problèmes ci-dessus peuvent tous se ramener à un problème de coloration de graphe.

Définition :

Une coloration d'un graphe consiste en l'attribution de couleurs aux sommets, de telle manière que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Remarque :

Il s'agit simplement d'un moyen de donner un contenu intuitif à une notion utile dans des contextes très variés.
Dans les problèmes, cet ensemble de couleurs peut être un ensemble de tranches horaires dans lesquelles on doit faire tenir diverses occupations de façon compatible, de cages de zoo dans lesquelles il ne faut pas mettre des animaux qui vont s'attaquer, de salles de classes dans lesquelles on veut organiser des options, etc.
Une grande partie de la difficulté tient ici dans le travail de modélisation, pour faire apparaître la question comme un problème de coloriage. En particulier, la construction du graphe n'est pas toujours évidente : pour les problèmes de coloriage de carte, comme on l'a vu dans l'exercice sur la carte de l'Europe, c'est le graphe directement induit qu'il faut considérer. Dans les problèmes de compatibilité, ce ne sont pas les sommets compatibles qu'il faut relier sur le graphe, comme on a spontanément tendance à le faire, mais les sommets incompatibles.

Définition :

Le nombre chromatique d'un graphe est le nombre minimum de couleurs nécessaires à sa coloration.
On note généralement $\chi(G)$ le nombre chromatique d'un graphe G.

On ne connaît pas de formule miracle permettant de déterminer le nombre chromatique d'un graphe quelconque. La plupart du temps il faut se contenter d'un encadrement, autrement dit d'un minorant et d'un majorant du nombre chromatique.
On a intérêt bien sûr à ce que le minorant soit le plus grand possible et que le majorant soit le plus petit possible. Si par hasard le minorant et le majorant sont les mêmes, on a gagné puisqu'on a alors le nombre chromatique du graphe.

Minorant du nombre chromatique

Quelques remarques simples permettent de minorer ce nombre chromatique.

Propriété :

Si G est un graphe, alors pour tout sous-graphe H de G on a : $\chi(H) \leqslant \chi(G)$.

Démonstration :

Une coloration de G avec $\chi(G)$ couleurs induit une coloration de H avec au plus $\chi(G)$ couleurs.

Propriété :

Le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre n (n étant un entier naturel non nul) est n.

Démonstration :

Les sommets étant tous adjacents, il faut autant de couleurs qu'il y a de sommets.

Propriété :

> Soit G un graphe.
> Si G contient un sous-graphe complet d'ordre n, alors $\chi(G) \geqslant n$.

Démonstration :

C'est la conséquence évidente des deux précédentes propriétés.

Majorant du nombre chromatique

Il est plus difficile de prouver des majorations générales du nombre chromatique.

Deux propriétés sont disponibles, mais elles donnent souvent des majorations trop larges :

Propriété :

> Soit G un graphe d'ordre n, alors $\chi(\mathrm{G}) \leqslant n$.

Démonstration :

Cette propriété est évidente : si on donne une couleur différente à chacun des sommets de G, on obtient une coloration de G.
Cette propriété donne un majorant du nombre chromatique qui est mauvais.

La suivante, qu'on admettra, donne un meilleur majorant. Aussi n'utiliserons-nous que celle-là :

Propriété :

> Considérons un graphe G et soit r le plus grand des degrés des sommets.
> Alors : $\chi(G) \leqslant r+1$

Pour en obtenir de meilleurs majorants, il faut avoir une stratégie pour colorier un graphe, stratégie qu'on appellera algorithme de coloration.

L'algorithme glouton permet de colorer un graphe en réduisant le nombre de couleurs.

Méthode :
On considère les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leurs degrés et on utilise, lorsque c'est possible, une couleur déjà utilisée, celle affectée du plus petit numéro.

Exemple :

Colorer le graphe G ci-contre :

Sommet	Degré	Couleur
E	3	(1)
O	3	(2)
R	3	(3)
L	2	(1)
N	2	(2)
Z	1	(1)

Remarque :
L'algorithme glouton ne donne pas nécessairement le nombre chromatique.
Par exemple, en colorant le graphe ci-dessous par l'algorithme glouton, on obtient une coloration avec 3 couleurs, alors que le nombre chromatique est 2.

Un algorithme de coloration

Nous allons décrire ci-après l'algorithme de coloration de Welsh-Powell.

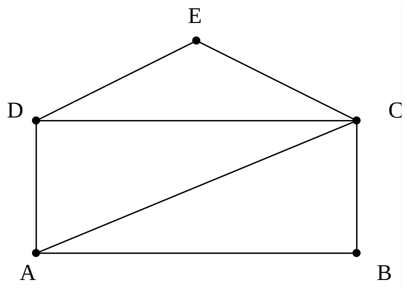
1. On classe d'abord les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré. On obtient ainsi une liste x_1, x_2, …, x_n de sommets telle que $\deg(x_1) > \deg(x_2) > \ldots > \deg(x_n)$.
2. On choisit une couleur c_1 pour le sommet x_1, et :
• en parcourant la liste dans l'ordre, on attribue la couleur c_1 au premier sommet non colorié et non adjacent à x_1 ;
• en continuant à parcourir la liste dans l'ordre, on attribue la couleur c_1 aux autres sommets non coloriés et non adjacents aux sommets déjà coloriés avec c_1 et, ce, jusqu'à la fin de la liste.
3. S'il reste des sommets non coloriés, on attribue une nouvelle couleur au premier sommet non colorié et on reprend la démarche.
4. On s'arrête dès que tous les sommets ont été coloriés.

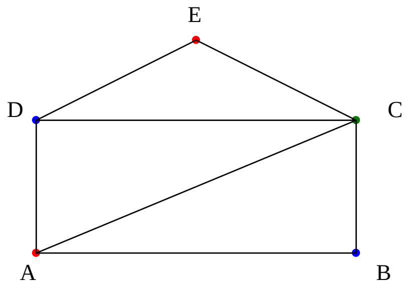
Remarque :
C'est un bon algorithme, mais précisons quand même que le nombre de couleurs utilisé par cet algorithme n'est pas forcément le nombre chromatique du graphe. L'exemple qui suit illustre cela. De plus, on remarquera qu'une partie de l'algorithme n'est pas entièrement déterminée : en effet, s'il y a plusieurs sommets de même degré, l'ordre dans lequel on les range est arbitraire, donc deux personnes appliquant cet algorithme au même graphe n'obtiendront pas forcément le même coloriage.

James Anthony Dominic Welsh (known professionally as D.J.A. Welsh) (born 29 August 1938) is an English mathematician and emeritus professor of Oxford University's Mathematical Institute. He is an expert in matroid theory, the computational complexity of combinatorial enumeration problems, percolation theory, and cryptography.

Martin Beynon Powell (1939-2002) : mathématicien anglais qui a enseigné au St Petter College d'Oxford de 1966 à 2002.

Exemple :





On utilise 3 couleurs.
Le nombre chromatique du graphe est donc 3.

Devoir maison de M. Philippe

Colorier une graphe c'est affecter une couleur à chaque sommet de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Le nombre chromatique, noté γ, est le lus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier un graphe.

Considérons un graphe *G*.

Un sous graphe de *G* est un graphe *G'* composé de certains sommets de *G* et de toutes les arêtes reliant ces sommets.

Notons *m* l'ordre du plus grand des sous graphes complets de *G* et Δ le plus grand degré des sommets de *G*.
Alors $m \leqslant \gamma \leqslant \Delta + 1$.

Algorithme de Welsh Powell

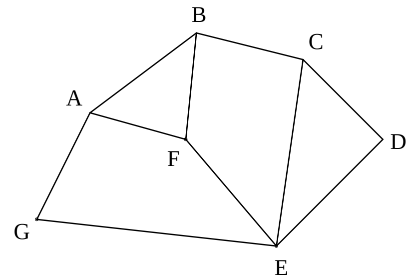
Pour colorier un graphe, on utilise l'algorithme suivant :
Étape 1 : Lister les sommets par ordre de degré décroissant
Étape 2 : Attribuer une couleur C_1 au premier sommet de la liste.
Étape 3 : Attribuer cette même couleur à tous les sommets qui ne sont pas adjacents avec le premier sommet de la liste et qui ne sont pas adjacents entre eux.
Étape 4 : Répéter les étapes 2 et 3 tant que tous les sommets ne sont pas coloriés.

X. Automates

T exp

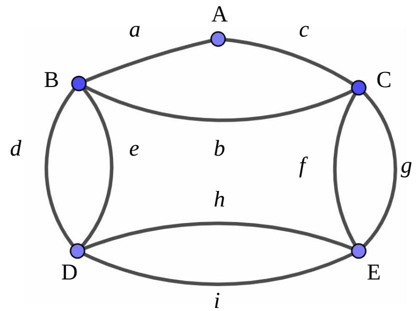
Exercices sur les graphes

1 Reproduire le graphe ***G*** ci-dessous.



1°) Déterminer l'ordre du graphe et le degré de chacun de ses sommets.
2°) Quelle est la distance entre les sommets A et B ? entre les sommets F et G ? entre les sommets A et D ? entre les sommets G et D ?
Quel est le diamètre du graphe ?
3°) Donner la matrice d'adjacence M associée à ***G*** (on numérotera les lignes et les colonnes dans l'ordre alphabétique).
4°) En déduire le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir.

2 Reproduire le graphe ***G*** ci-dessous.

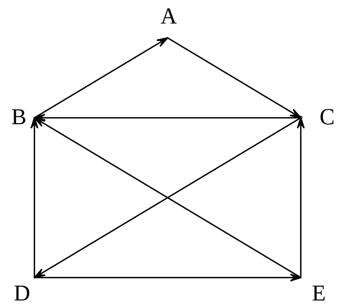


Le graphe ***G*** admet-il un cycle eulérien ?
Si oui, donner un tel cycle.
Si non, expliquer pourquoi.

3 Soit ***G*** un graphe non orienté complet d'ordre *n* où *n* est un entier naturel non nul.
Déterminer le degré de chaque sommet ; en déduire le nombre d'arêtes en fonction de *n*.
Retrouver ce résultat par une méthode combinatoire.

4 Soit ***G*** un graphe non orienté complet d'ordre *n* où *n* est un entier naturel non nul.
1°) Écrire la matrice d'adjacence M.
2°) Dans cette question, on prend $n = 2$.
Déterminer, pour *p* entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1, M^p.
En déduire le nombre de chemins de ***G*** qui relient deux sommets.
3°) Reprendre la question précédente pour $n = 3$. On utilisera le site dcode.

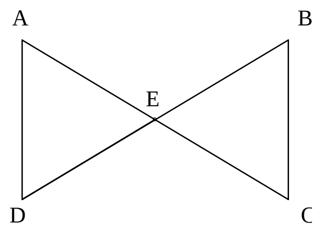
$\boxed{5}$ Recopier le graphe orienté G suivant :



Combien y a-t-il de chemins de longueur 4 qui partent de A ? Citer ces chemins.
Parmi eux, y a-t-il des chemins hamiltoniens ?
Écrire tous les circuits partant de A.

$\boxed{6}$ Soit G un graphe non orienté d'ordre n où n est un entier naturel non nul.
On suppose que tous les sommets ont le même degré k où k est un entier naturel ; on désignera par (C) cette condition. Un tel graphe est dit régulier.
1°) Représenter un graphe vérifiant la condition (C) pour $n = 4$ et $k = 3$.
2°) Déterminer une relation entre le nombre d'arêtes de G, n et k.
En déduire que si G est un graphe vérifiant la condition (C) alors l'un des entiers n ou k est pair.
3°) Que peut-on dire d'un graphe vérifiant la condition (C) avec $k = 1$?
4°) On revient au cas général d'un graphe G vérifiant la condition (C).
Écrire sa matrice d'adjacence M.

$\boxed{7}$ On considère le graphe G suivant en forme de papillon.

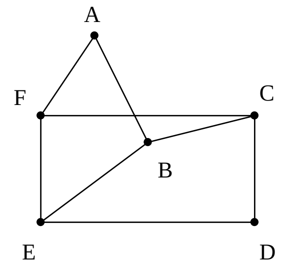


Ce graphe admet-il un cycle eulérien ?

$\boxed{8}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère un graphe G non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n et dont la matrice d'adjacence en prenant les sommets dans l'ordre croissant est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est telle que le coefficient $m_{i,\,j}$ situé sur la ligne i et dans la colonne j est donné par $m_{i,\,j} = 1$ si $|\,i - j\,| = 1$ et $m_{i,\,j} = 0$ sinon.
1°) Représenter le graphe G pour plusieurs petites valeurs de n (par exemple, $n = 5$).
2°) Décrire G dans le cas où n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.

$\boxed{9}$ Recopier le graphe G suivant :



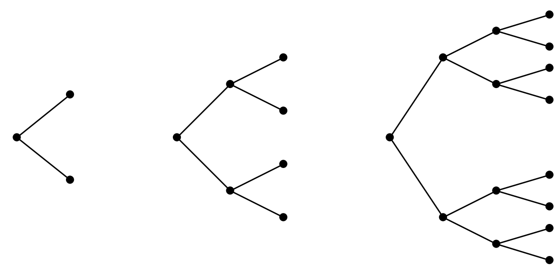
G admet-il une chaîne hamiltonienne ? un cycle hamiltonien ?

$\boxed{10}$ Construire lorsque c'est possible un graphe non orienté à cinq sommets de degrés :
a) 3 ; 2 ; 1 ; 3 ; 1 b) 3 ; 2 ; 2 ; 3 ; 1 c) 2 ; 1 ; 3 ; 3 ; 1

$\boxed{11}$ Tracer un graphe non orienté associé à chaque matrice d'adjacence :

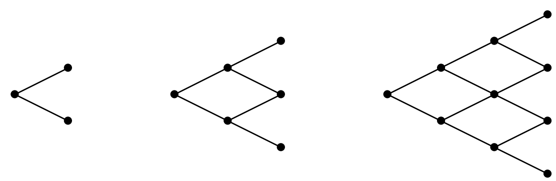
a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{12}$ Donner le diamètre des arbres suivants (les arbres sont des graphes particuliers) :



Peut-on généraliser le résultat ?

$\boxed{13}$ Donner le diamètre des arbres suivants :

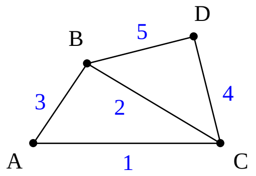


Peut-on généraliser le résultat ?

14 Déterminer le nombre d'arêtes d'un graphe non orienté G dont la matrice d'adjacence M vérifie

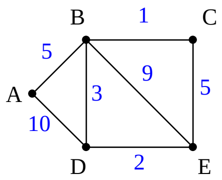
$$\mathrm{M}^2=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

15 Recopier le graphe G suivant :



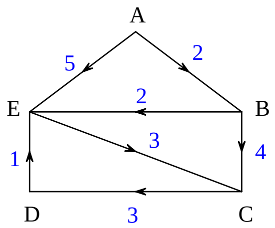
Déterminer le poids des chaînes A-B-C-D, D-C-A, B-D-C-A.

16 Recopier le graphe G suivant :



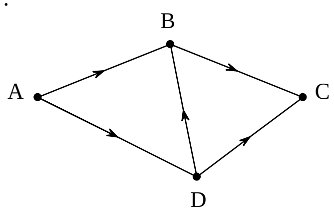
Déterminer la chaîne de poids minimal entre A et E.

17 Recopier le graphe G suivant :



1°) Déterminer le(s) chemin(s) de poids minimal reliant A à E.
2°) Déterminer le(s) chemin(s) simple(s) de poids maximal reliant A à E.

18 Reproduire le graphe G suivant :



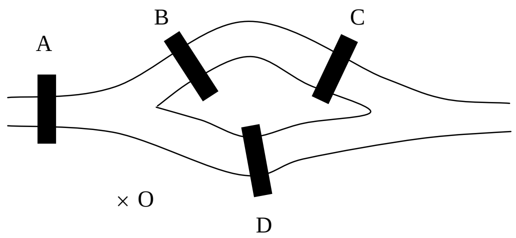
1°) Écrire la matrice d'adjacence M de G en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
2°) Calculer les puissances de M. Qu'observe-t-on ?
3°) Combien existe-t-il de chemins partant de A ? de B ? de C ? de D ?

19 Quel est le diamètre d'un graphe (non orienté) complet ?

20 Soit G un graphe non orienté d'ordre n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 qui peut être représenté par un polygone régulier convexe (sans les diagonales).
Quel est le diamètre de G ?

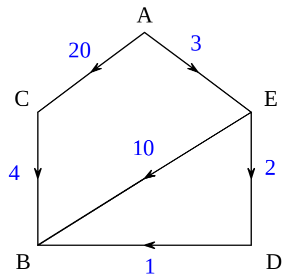
21 Soit G un graphe connexe d'ordre n admettant $n-1$ arêtes où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Quel est le diamètre de G ?
L'énoncé manque de précision. Il y a plusieurs graphes possibles (noté le 23-8-2021).

22 Dans une ville, quatre ponts A, B, C, D permettent de franchir une rivière.
Les ponts B, C, D permettent l'accès à une île.



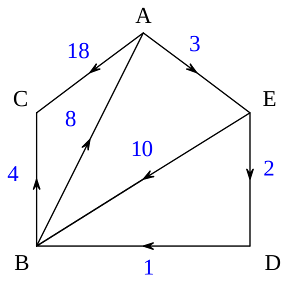
Un promeneur part du point O et désire revenir à son point de départ après avoir franchi la rivière sans jamais passer deux fois sur le même pont.
Est-ce possible ?
Combien y a-t-il de trajets possibles ?

23 Recopier le graphe orienté pondéré ci-dessous.



Déterminer le chemin de A à B de poids minimal.

$\boxed{24}$ Recopier le graphe orienté pondéré ci-dessous.



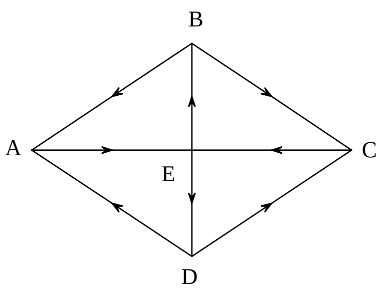
Déterminer le chemin de A à C de poids minimal.

$\boxed{25}$ On considère un entier naturel n.
On note S l'ensemble des entier naturels inférieurs ou égaux à n ($S=\{0\,;1\,;\ldots\,;n\}$).

1°) On considère le graphe orienté G dont l'ensemble des sommets est S et tel qu'il existe un arc du sommet i au sommet j si et seulement si $i \leqslant j$.
Déterminer le degré de chaque sommet (attention aux boucles).
Déterminer le nombre d'arêtes de G.
G est-il connexe ?
Écrire la matrice d'adjacence M en prenant les sommets dans l'ordre croissant.

2°) On suppose que $n \geqslant 1$ et on considère le graphe orienté G' dont l'ensemble des sommets est S et tel qu'il existe un arc du sommet i au sommet j si et seulement si $i < j$.
Déterminer le nombre d'arêtes de G'.
G' est-il connexe ?
Écrire la matrice d'adjacence M' en prenant les sommets dans l'ordre croissant.

$\boxed{26}$ Recopier le graphe orienté G ci-dessous.



Écrire la matrice d'adjacence M de G en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
G est-il fortement connexe ?

$\boxed{27}$ **Le graphe du web : un premier modèle de navigation sur le web**

On modélise le web par un graphe orienté à n sommets représentant chacun une page du web et dont les arêtes orientées représentent les liens hypertextes entre celles-ci. Lorsque la page i contient au moins un lien vers la page j, on dit que la page i pointe vers la page j. Cette situation est modélisée par l'existence de l'arête orientée de i vers j, notée $i \to j$. On dit que $i \to j$ est une arête sortante de i et une arête entrante de j. Si aucun lien de la page i ne pointe vers la page j, on note $i \not\longrightarrow j$.

Pour tout entier $i \in [\![1\,;n]\!]$, λ_i désigne le nombre d'arêtes sortantes de la page i, c'est-à-dire le nombre de pages vers laquelle elle pointe. On suppose qu'aucune page ne pointe vers elle-même.

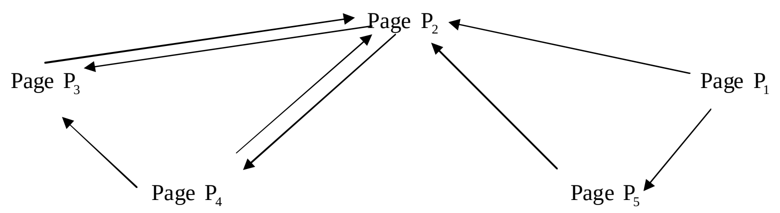
Premier modèle de navigation sur le web
On suppose qu'un surfeur navigue sur le web de la manière suivante : lorsqu'il se trouve sur la page i,
- si la page i pointe vers d'autres pages, il se dirige au hasard, de manière équiprobable, vers l'une de ces pages ;
- si la page i ne pointe vers aucune page, il reste sur la page i.

Vérifier que la matrice de transition associée à ce modèle de navigation est la matrice $\mathrm{A}=\left(a_{i,j}\right)$ carrée d'ordre n définie par :

$$a_{i,i}=\begin{cases}1 \text{ si la page } i \text{ pointe vers aucune autre page}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

$$a_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_i} \text{ si } i \to j\\ 0 \text{ sinon}\end{cases} \quad \text{pour } i \neq j$$

On a représenté ci-dessous cinq pages Internet comprenant des articles sur un sujet donné. Sur certaines des pages, un lien pointe vers une autre des pages ; ce lien est matérialisé par la flèche orientée.



Reproduire ce graphe probabiliste en complétant par des probabilités (lire la question 2°).

1°) Laquelle de ces pages semble être *a priori* la plus pertinente pour le sujet traité ?

2°) On suppose qu'un utilisateur qui arrive sur l'une de ces pages suivra de façon équiprobable un de ces liens de cette page vers les autres pages.
Établir la matrice A donnant les probabilités de passage d'une page à une autre par un utilisateur c'est-à-dire la matrice de transition en colonnes du graphe probabiliste (avec l'ordre P_1, P_2, P_3, P_4, P_5).

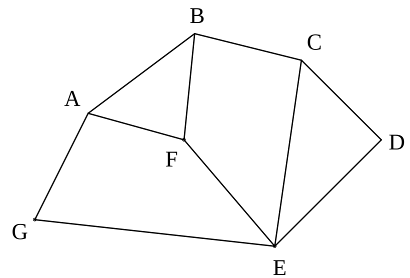
3°) On suppose qu'un utilisateur est situé au départ sur la page P_1.
a) À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau qui donne des probabilités d'arrivées successives sur chaque page après 1 clic, 2 clics, 5 clics et 10 clics.

Pages	Après 0 clic	Après 1 clic	Après 2 clics	Après 5 clics	Après 10 clics
P_1	1				
P_2	0				
P_3	0				
P_4	0				
P_5	0				

b) Quelle est la page qui a la plus grande probabilité d'être fréquentée après 10 clics ? Comparer avec la réponse donnée à la question 1°).
c) Observer l'évolution de ces probabilités lorsque le nombre *n* de clics devient de plus en plus grand. Vers quelles probabilités limites de fréquentation de chaque page semble tendre la répartition ?
4°) Pour un utilisateur situé au départ sur un autre page que la 1, observer l'évolution des mêmes probabilités. Que constate-t-on ?
5°) On note S la matrice colonne formée des probabilités limites de fréquentations conjecturées à la question 3°).
Vérifier que S est un état stable.

Solutions

1



1°) $\mathcal{G}$ est un graphe d'ordre 7.

sommet	A	B	C	D	E	F	G
degré	3	3	3	2	4	3	2

2°)

On utilise des « chaînes simples » (on n'utilise pas deux fois la même arête).

Propriété :
Si deux sommets sont adjacents, alors la distance entre ces deux sommets est 1.

La distance entre A et B est 1. On peut écrire $d_{\mathcal{G}}(A, B) = 1$ (on n'utilise pas la notation AB=un).

La distance entre F et G est égale à 2.

La distance entre A et D est égale à 3.

La distance entre G et D est égale à 2.

On dresse un tableau des distances :

distance	A	B	C	D	E	F	G
A	x	1		3	2	1	1
B	x	x	1	2	2	1	2
C	x	x	x	1	1	2	2
D	x	x	x	x	1	2	2
E	x	x	x	x	x	1	1
F	x	x	x	x	x	x	2
G	x	x	x	x	x	x	x

Le diamètre de $\mathcal{G}$ est donc 3.
On peut écrire diam $\mathcal{G} = 3$.

3°)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(on utilise la calculatrice)}$$

Pour déterminer le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir, on se place sur la première ligne de la matrice M^2. On regarde tous les coefficients sauf le premier qui donne le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A et arrivant à A.
Le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir est $1+1+2+1$.
Il y a donc 5 chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir.

$\boxed{2}$

$\mathcal{G}$ est un graphe connexe d'ordre 5.

Ce n'est pas un graphe simple car certains sommets sont reliés par plusieurs arêtes. On parle de multigraphe.

sommet	A	B	C	D	E
degré	2	4	4	4	4

Il n'y a aucun sommet de degré impair donc $\mathcal{G}$ admet un cycle eulérien.

On peut par exemple donner le cycle partant de A empruntant successivement les arêtes *c*, *g*, *i*, *d*, *b*, *f*, *h*, *e*, *a*.

$\boxed{3}$

Chaque sommet de $\mathcal{G}$ est relié à tous les autres donc est de degré $n-1$.
Le nombre d'arêtes est égal à la somme des degrés des sommets divisée par 2 (lemme des poignées de main).

Donc nombre d'arêtes $= \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Autre méthode :

Le nombre d'arêtes de $\mathcal{G}$ est égal au nombre de combinaisons de 2 éléments pris parmi n : $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

$\boxed{4}$

1°) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice dont tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 0 et les autres sont égaux à 1).

2°) Le graphe est facile à représenter dans ce cas. Il s'agit deux points reliés par une arête.

La matrice d'adjacence est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Autrement dit, M^2 est la matrice identité d'ordre 2.

On en déduit que la suite $\left(M^p\right)$ est périodique de période 2.

Si p est impair, alors $M^p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et si p est pair, $M^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il est facile de comprendre le résultat.
On note A et B les sommets du graphe.

Pour p impair, il n'y a aucune chaîne de longueur p qui relie A à A et B à B ; il y a une seule chaîne qui relie A à B (la chaîne A-B-A-B-…-A-B) et qui relie B à A (la chaîne B-A-B-A-…-B-A).

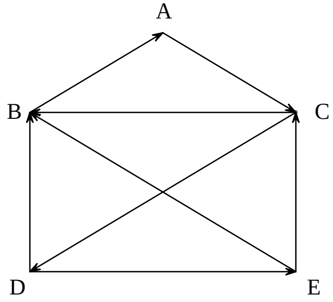
Même chose pour p pair.

3°) La matrice d'adjacence est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Grâce au site dcode, on obtient $M^p = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} \alpha_p & \beta_p & \beta_p \\ \beta_p & \alpha_p & \beta_p \\ \beta_p & \beta_p & \alpha_p \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel p, où $\alpha_p = 2^p + 2\times(-1)^p$ et $\beta_p = 2^p - (-1)^p$.
Ce résultat peut se démontrer de plusieurs façons, par exemple par récurrence.

Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, le nombre de chaînes de longueur p qui relient deux sommets est égal à $\dfrac{\alpha_p}{3}$ si les sommets sont confondus et $\dfrac{\beta_p}{3}$ si les sommets sont distincts.
On peut vérifier d'ailleurs que ces deux quotients sont des entiers naturels en utilisant par exemple les congruences modulo 3.

$\boxed{5}$



Pour déterminer le nombre de chemins de longueur 4 qui partent de A, on utilise la matrice d'adjacence M du graphe.

Le graphe est d'ordre 5 donc M est une matrice carrée d'ordre 5.

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\0&1&0&0&1\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

Comme le graphe n'est pas orienté, la matrice M n'est pas symétrique.

Grâce à la calculatrice, on obtient $\mathrm{M}^4=\begin{pmatrix}1&1&2&0&0\\1&1&0&0&1\\1&2&1&2&0\\1&2&1&1&1\\1&2&2&1&0\end{pmatrix}$.

Pour déterminer le nombre de chemins de longueur 4 partant de A, on effectue la somme des coefficients de la première ligne de M^4.
On trouve $1+1+2=4$ chemins.

On peut facilement écrire ces chemins en tenant compte de l'orientation des arêtes.
A-C-D-B-A
A-C-D-E-B (ce chemin est hamiltonien car les sommets sont deux à deux distincts)
A-C-D-E-C
A-C-B-A-C

On parle de chemin car le graphe est orienté.

Paragraphe **VII**
Chaîne hamiltonienne : chaîne qui passe une et une seule fois par chaque sommet (graphes non orientés)
Chemin hamiltonien : chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet (graphes orientés)

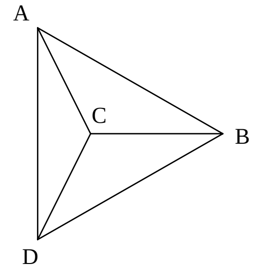
Le chemin A-C-D-E-B est un chemin hamiltonien.

Les circuits partant de A sont : A-C-A et A-C-D-B-A.

$\boxed{6}$

Question : Peut-il y avoir des boucles ?

1°) On peut représenter le graphe de diverses manières. On peut le représenter ainsi ou sous la forme d'un carré avec les diagonales.



2°) On sait que, dans un graphe, la somme des degrés de chaque sommet est égale au double du nombre d'arêtes (« lemme des poignets de mains »).
On a donc $2\times$nombre d'arêtes $=\underbrace{k+k+...+k}_{n}$ donc $2\times$nombre d'arêtes$=nk$.

On observe que si un graphe G vérifie la condition (C), alors nk est pair.
Or un produit est pair si et seulement si l'un au moins des facteurs est pairs. Par conséquent, n ou k est pair.

3°) Pour $k=1$, alors, d'après le résultat de la question précédente, on a $2\times$nombre d'arêtes$=n$.
On en déduit que n est pair.

Par exemple, si l'on suppose que $n=2$ et toujours pour $k=1$, le graphe G peut être représenté par deux sommets reliés par une arête.

4°)

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&0&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$$ (matrice constituée de 0 sur la diagonale et de 1 partout ailleurs)

$\boxed{7}$

Chaîne eulérienne : passe une et une seule fois par chaque arête

On pourrait éventuellement utiliser le théorème d'Euler pour les graphes en utilisant les degrés.

Cycle eulérien : A-E-C-B-E-D-A

Le graphe G est eulérien.

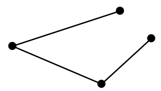
$\boxed{7}$ 2°) C'est un graphe simple.
Il est eulérien et hamiltonien.

On cherche une chaîne qui passe par tous les sommets (on ne peut pas répéter le même sommet).

8

1°)

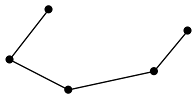
Cas $n=4$ 4 sommets et 3 arêtes



Cas $n=5$

On a $M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$.

Le graphe *G* peut se représenter sous la forme de 5 points (que l'on peut représenter alignés).



2°) Décrire *G*.

Le graphe *G* peut se représenter sous la forme de *n* points alignés.

Pour que *G* soit « fermé », on doit avoir $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple pour $n=5$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un graphe connexe d'ordre *n*.

9

Il n'y a pas de critère pour caractériser l'existence d'une chaîne hamiltonienne dans un graphe.

Chaîne hamiltonienne : A-F-C-B-E-D

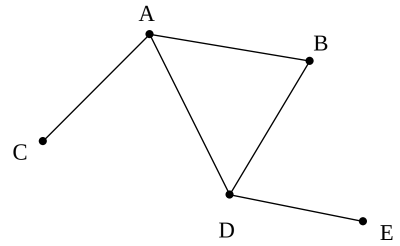
Cycle hamiltonien : A-F-C-D-E-B-A

10

Construire lorsque c'est possible un graphe non orienté à cinq sommets de degrés :
a) 3 ; 2 ; 1 ; 3 ; 1 b) 3 ; 2 ; 2 ; 3 ; 1 c) 2 ; 1 ; 3 ; 3 ; 1

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

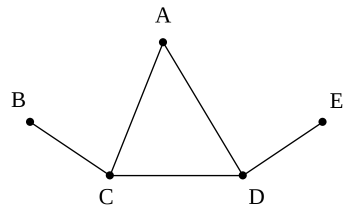
a) Dans ce cas, la somme des degrés des sommets est égale à 10 donc le nombre d'arêtes est égal à 5.



On peut échanger C et E sur ce graphe.

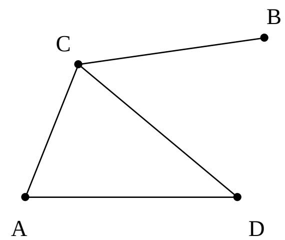
b) La somme des degrés des sommets est égale à 11.
11 est un nombre impair donc il n'existe pas de graphe satisfaisant la condition des degrés.

c)

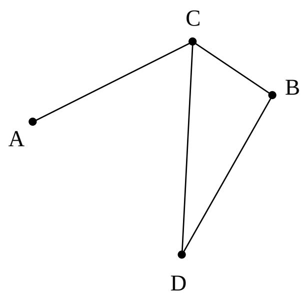


11

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



12

Les diamètres des arbres sont respectivement égaux à 2, 4, 6.

Le diamètre d'un arbre binaire à n niveaux (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) est égal à $2n$.

13

Les diamètres des arbres sont respectivement égaux à 2, 4, 6.
Le diamètre d'un arbre binaire à n niveaux sur le même modèle que les précédents (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) est égal à $2n$.

14

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Attention, on ne peut pas trouver M : on ne peut pas prendre la racine carrée d'une matrice.

G est un graphe d'ordre 6.

On note A, B, C, D, E, F les sommets de G dans l'ordre où ils apparaissent pour écrire la matrice M.

On utilise la propriété du cours sur les coefficients de la diagonale principale du carré de la matrice d'adjacence.

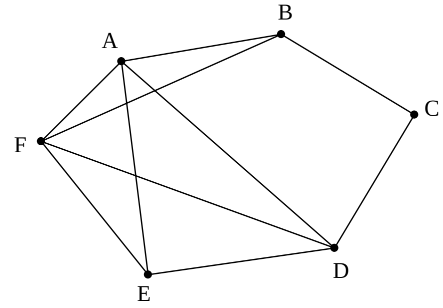
On a $\deg A = 4$, $\deg B = 3$, $\deg C = 2$, $\deg D = 4$, $\deg E = 3$, $\deg F = 4$.

La somme des degrés est égale à 20. Le nombre d'arêtes du graphe est donc égal à 10.

On peut éventuellement proposer un graphe G vérifiant la condition.

Attention, G n'est pas forcément un graphe simple.

Ce graphe vérifie la condition des degrés. En revanche, le carré de la matrice d'adjacence n'est pas égale à la matrice donnée au début.



15

poids de la chaîne A-B-C-D $= 3 + 2 + 4 = 9$

poids de la chaîne D-C-A $= 4 + 1 = 5$

poids de la chaîne B-D-C-A $= 5 + 4 + 1 = 10$

16

On cherche la chaîne de poids minimal entre A et E.

On ne considère que des chaînes simples.

poids de la chaîne A-B-C-E $= 5 + 1 + 5 = 11$

poids de la chaîne A-D-E $= 10 + 2 = 12$

poids de la chaîne A-B-E $= 5 + 9 = 14$

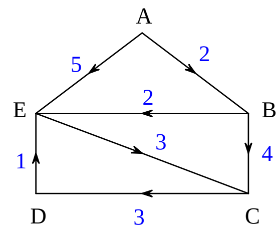
poids de la chaîne A-B-D-E $= 10$

poids de la chaîne A-D-B-E $= 10 + 3 + 9 = 22$

La chaîne de poids minimal entre A et E est la chaîne A-B-D-E.

La chaîne de poids minimal A et E est A-B-D-E. Elle est de poids 10.

17

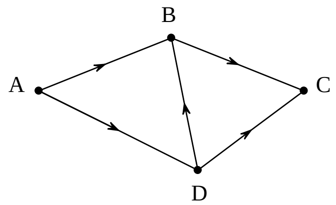


1°) A-B-E
Il s'agit d'un chemin de poids 4.

On peut utiliser éventuellement l'algorithme de Dikjstra.

2°) Un chemin simple est un chemin ne comprenant que des arêtes distinctes.
A-B-C-D-E
Il s'agit d'un chemin de poids 10.

18



1°) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2°)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme M^3 est une matrice non nulle mais que M^4 est la matrice nulle d'ordre 4, M est une matrice nilpotente d'ordre 4.

Toutes les puissances de M d'exposant entier naturel supérieur ou égal à 4 sont nulles.

3°) Il y a un nombre fini de chemins.

On calcule la matrice $M+M^2+M^3$.

$$M+M^2+M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient tous les chemins possibles de toutes les longueurs entre les sommets.
Chemins partant de A $\longrightarrow$ $2+3+1=6$ (somme des coefficients de la première ligne)

Chemins partant de B $\longrightarrow$ 1 (somme des coefficients de la 2e ligne)

Chemins partant de C $\longrightarrow$ 0 (somme des coefficients de la 3e ligne)

Chemins partant de D $\longrightarrow$ $1+2=3$(somme des coefficients de 4e ligne)

On peut noter que G n'est pas fortement connexe. Par exemple, il n'existe pas de chemin de B à A.

19

Le diamètre du graphe est égal à 1 car tous les sommets sont reliés entre eux par une arête. Tous les sommets sont donc reliés par une chaîne de longueur 1.
Autrement dit, la plus courte chaîne qui relie deux sommets quelconques distincts a pour longueur 1.

20

$n=3$ diam $G=1$
$n=4$ diam $G=2$
$n=5$ diam $G=2$
$n=6$ diam $G=3$
$n=7$ diam $G=3$

On peut « faire » deux cas selon la parité de n.

On peut conjecturer le diamètre de G est donné par $E\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

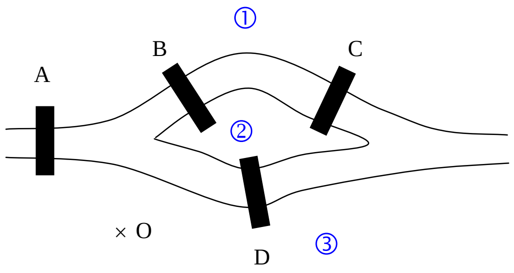
21 Soit G un graphe connexe d'ordre n admettant $n-1$ arêtes où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Quel est le diamètre de G ?

22

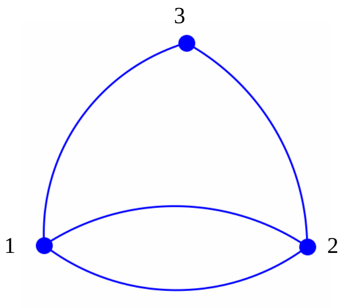
On peut essayer de trouver un chemin en partant de O et passant une seule fois par chaque pont.
On voit que ce n'est pas possible.

Pour justifier rigoureusement, on reprend la même idée que pour le problème des ponts de Konigsberg.

On commence par nommer 3 zones :



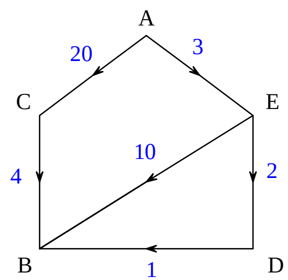
On dresse ensuite un graphe non orienté, les liaisons représentant les ponts entre les zones.



sommet	1	2	3
degré	3	3	2

On observe u'il y a exactement deux sommets de degré impair.
Il existe donc une chaîne eulérienne entre les sommets 1 et 2, mais pas de cycle eulérien.
Le graphe est semi-eulérien.

23



Déterminer le chemin de A à B de poids minimal.

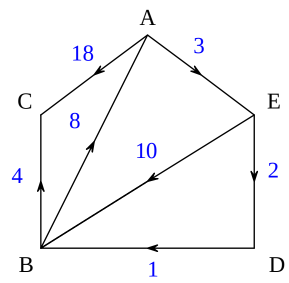
On écrit toues les chemins simples de A à B.

Il y a 3 chemins simples allant de A à B :

Chemin A-C-B : poids 24
Chemin A-E-B : poids 13
Chemin A-E-D-B : poids 6

Le chemin de A à B de poids minimal est A-E-D-B.
Il est de poids 6.

24

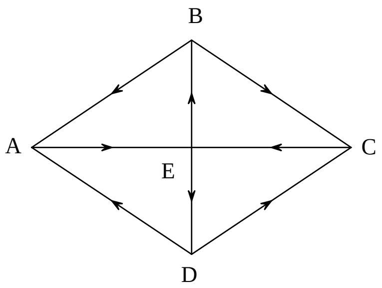


Le chemin de A à C de poids minimal est : A-E-D-B-C.
Il est de poids 10.

On utilise l'algorithme de Dijkstra.

25 On considère un entier naturel n.
On note S l'ensemble des entier naturels inférieurs ou égaux à n ($S=\{0\,;1\,;...\,;n\}$).
1°) On considère le graphe orienté G dont l'ensemble des sommets est S et tel qu'il existe un arc du sommet i au sommet j si et seulement si $i \leqslant j$.
Déterminer le degré de chaque sommet (attention aux boucles).
Déterminer le nombre d'arêtes de G.
G est-il connexe ?
Écrire la matrice d'adjacence M en prenant les sommets dans l'ordre croissant.
2°) On suppose que $n \geqslant 1$ et on considère le graphe orienté G' dont l'ensemble des sommets est S et tel qu'il existe un arc du sommet i au sommet j si et seulement si $i < j$.
Déterminer le nombre d'arêtes de G'.
G' est-il connexe ?
Écrire la matrice d'adjacence M' en prenant les sommets dans l'ordre croissant.

26



Écrire la matrice d'adjacence M de *G* en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

Pour savoir si *G* est fortement connexe, plutôt que de chercher à savoir s'il est toujours possible de passer d'un sommet à un autre par un chemin, il est plus commode d'utiliser le critère matriciel.

Comme *G* est un graphe d'ordre 5, on peut calculer $\mathrm{I}_5+\mathrm{M}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\1&1&1&0&0\\0&0&1&0&1\\1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$.

Rappel des propriétés :

Soit *G* un graphe non orienté d'ordre *n* où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note M la matrice d'adjacence en prenant les sommets dans un ordre fixé.

Propriété 1 :

> *G* est connexe si et seulement si tous les coefficients de la matrice $\mathrm{L}_{n-1}=\mathrm{M}+\ldots+\mathrm{M}^{n-1}$ sont strictement positifs, sauf éventuellement ceux de la diagonale qui peuvent être nuls.

Propriété 1' (conséquence immédiate de la propriété 1) :

> *G* est connexe si et seulement si tous les coefficients de la matrice $\mathrm{I}_n+\mathrm{M}+\ldots+\mathrm{M}^{n-1}$ sont strictement positifs.

On rappelle que, comme on avait vu dans le chapitre sur les matrice, I_n désigne la matrice identité d'ordre *n*, c'est-à-dire la matrice carrée d'ordre *n* dont tous les coefficients sont égaux à 0 sauf ceux de la diagonale qui valent 1.

On peut remplacer I_n par n'importe quelle matrice carrée d'ordre *n* à coefficients strictement positifs sur la diagonale et nuls ailleurs.

Propriété 2 :

> *G* est connexe si et seulement si tous les coefficients de la matrice $\left(\mathrm{I}_n+\mathrm{M}\right)^{n-1}$ sont strictement positifs.

La même propriété s'applique également pour reconnaître si un graphe orienté est fortement connexe ou non, ce qui n'est pas évident à première vue quand on donne le graphe.

$$\left(\mathrm{I}_5+\mathrm{M}\right)^4=\begin{pmatrix}7&3&6&3&5\\8&7&8&6&6\\6&3&7&3&5\\8&6&8&7&6\\6&5&6&5&8\end{pmatrix}$$

Comme tous les coefficients de $\left(\mathrm{I}_5+\mathrm{M}\right)^4$ sont strictement positifs, *G* est fortement connexe.