Terminale experts

Interrogation écrite du mardi 18 mai 2021

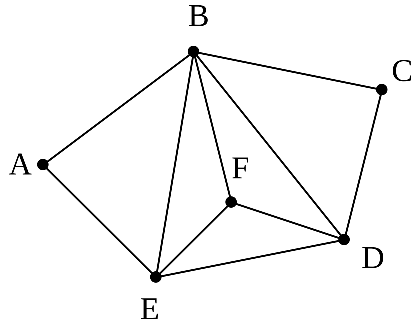
Durée : 50 minutes
- Fiche
- Calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

Note : ….. / 20

Il est demandé de ne rien écrire sur les graphes donnés dans les exercices.

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)



On modélise le plan d'un village à l'aide du graphe *G* ci-contre.
Les sommets représentent les carrefours et les arêtes schématisent les routes reliant ces carrefours.

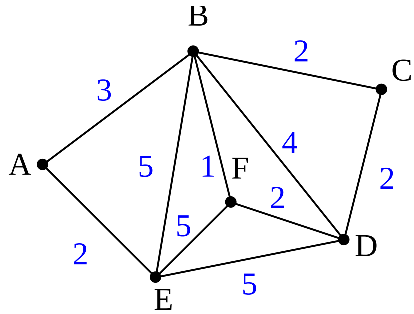
1°) Combien y a-t-il de trajets de trois routes reliant les carrefours C et E ?

…. (une seule réponse sans justifier)

2°) Compléter la chaîne suivante correspondant à un trajet partant de B et arrivant à F en empruntant une fois et une seule chaque route.

B-C-D-E-….-….-….-F-D-B-F

Proposer un autre trajet possible : …………………………………….



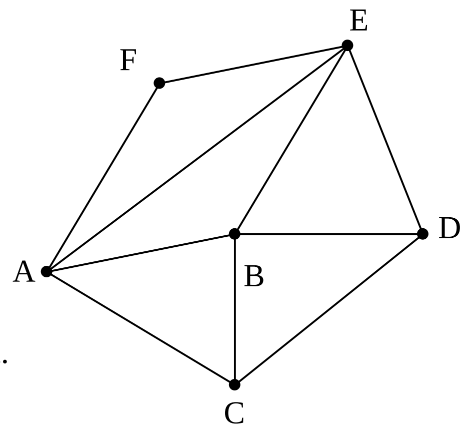
3°) On pondère *G* par les longueurs, en centaines de mètres, de chacune des routes.

Quel est le plus court chemin menant du carrefour A au carrefour D ?

……………………

Quelle est sa longueur ? ……

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)



Une agence de tourisme propose la visite de certains monuments d'une capitale.
Chacun de ces monuments est désigné par une lettre A, B, C, D, E, F.
Cette agence fait appel à une société de transport par autocar qui propose les liaisons représentées sur le graphe *G* ci-contre (chacune de ces liaisons pouvant s'effectuer dans les deux sens de circulation).

1°) Est-il possible de trouver un trajet empruntant une fois et une seule chacune des dix liaisons indiquées sur le graphe ? Si oui, donner un exemple d'un tel trajet.

………..

………..

………..

2°) Écrire ci-contre la matrice d'adjacence M de G
en classant les sommets par ordre alphabétique.

Combien y a-t-il de trajets permettant de relier les monuments A et D en utilisant au maximum trois liaisons ?
Justifier.

……..

……..

……..

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

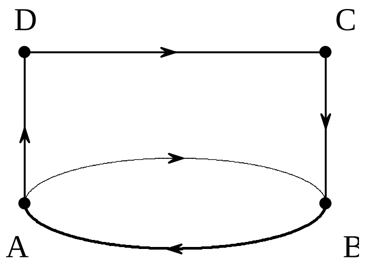
Soit G un graphe non orienté d'ordre n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note (C) la condition « tous les sommets de G sont de degré 3 ».

1°) On suppose que $n = 4$.
Représenter ci-contre un graphe G vérifiant la condition (C).
On notera les sommets A, B, C, D.
2°) On revient au cas général où est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On suppose que G vérifie la condition (C). n est-il pair ou impair ? Justifier.

……..

……..

IV. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points)



On considère le graphe orienté G ci-contre.

1°) Quelle est la distance de B à C ? ….. (une seule réponse sans égalité)

2°) Écrire ci-contre la matrice d'adjacence M associée à G
en classant les sommets par ordre alphabétique.

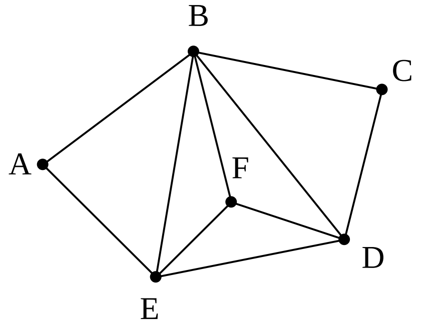
3°) Vrai ou faux ? Répondre dans la colonne de droite sans justifier en écrivant les lettres V ou F.

Tout chemin de A à B possède un nombre impair d'arêtes.	
G est un graphe hamiltonien.	
G est un graphe eulérien.	

Corrigé de l'interrogation écrite du 18-5-2021

I.

On modélise le plan d'un village à l'aide du graphe *G* ci-contre.
Les sommets de *G* représentent les carrefours et les arêtes de *G* schématisent les routes reliant ces carrefours.



1°) Combien y a-t-il de trajets de trois routes reliant les carrefours C et E ?

5 (une seule réponse sans justifier)

On peut écrire tous les trajets de trois routes reliant les carrefours C et E.

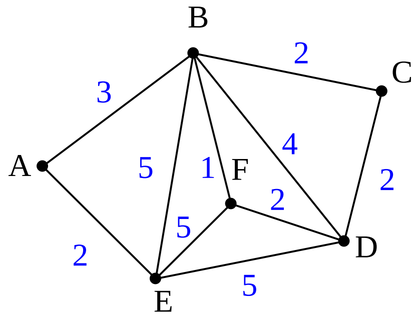
On peut aussi écrire la matrice d'adjacence M du graphe *G* et calculer M^3.

2°) Compléter la chaîne suivante correspondant à un trajet partant de B et arrivant à F en empruntant une fois et une seule chaque route.

B-C-D-E-A-B-E-F-D-B-F

Proposer un autre trajet possible : B-C-D-E-A-B-D-F-E-B-F

B-E-A-B-F-D-B-C-D-E-F



3°) On pondère *G* par les longueurs, en centaines de mètres, de chacune des routes.

Quel est le plus court chemin menant du carrefour A à D ? A-B-F-D (chaîne de longueur 3)

Il n'y a qu'une chaîne de poids minimal.

Quelle est sa longueur ? 600 m

On peut éventuellement utiliser l'algorithme de Dijkstra. Il est intéressant ici car il y a un retour en arrière.

On cherche une (la) chaîne de A à D ayant un poids minimal.

Étape	Sommets sélectionnés	Chemins créés
0	A	
1	A, E	A-E
2	A, E, B	A-E A-B
3	A, E, B, F	A-E A-B-F
4	A, E, B, F, D	A-E A-B-F-D

① On regarde les arêtes de poids minimal partant de A.
A-B → 3 A-E → 2
On retient la chaîne A-E.

② On regarde les arêtes de poids minimal partant de E et de A, à l'exception de l'arête A-E déjà créée.

E-B → 5 E-D → 5 A-B → 3

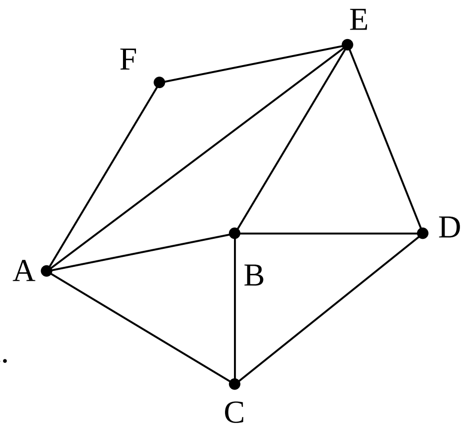
Donc on revient en arrière. On retient l'arête A-B. On a donc la chaîne A-B.

③ On regarde les arêtes de poids minimal partant de B, E, A, à l'exception des arêtes déjà considérées.

….

④ On a finalement la chaîne A-B-F-D dont le poids est égal à 6, ce qui correspond à un trajet de 600 mètres.

II.



Une agence de tourisme propose la visite de certains monuments d'une capitale.
Chacun de ces monuments est désigné par une lettre A, B, C, D, E, F.
Cette agence fait appel à une société de transport par autocar qui propose les liaisons représentées sur le graphe *G* ci-contre (chacune de ces liaisons pouvant s'effectuer dans les deux sens de circulation).

1°) Est-il possible de trouver un trajet empruntant une fois et une seule chacune des dix liaisons indiquées sur le graphe ? Si oui, donner un exemple d'un tel trajet.

La question revient à déterminer s'il existe une chaîne qui contient une fois et une seule chacune des arêtes du graphe *G* c'est-à-dire une chaîne eulérienne.
Or, d'après le théorème d'Euler, un graphe connexe contient une chaîne eulérienne si et seulement s'il possède 0 ou 2 sommets de degré impair.
On note d'abord que *G* est bien un graphe connexe.
Le tableau ci-après recense le degré de chacun des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	4	4	3	3	4	2

Le graphe *G* possède exactement 2 sommets de degré impair : C et D. Il existe donc au moins une chaîne eulérienne c'est-à-dire un trajet qui emprunte une fois et une seule chacune des routes de *G*.
Ces trajets ont nécessairement comme extrémités C et D.
On a par exemple le trajet (la chaîne) : C-B-D-E-B-A-E-F-A-C-D.

On peut aussi proposer les chaînes :
C-D-E-F-A-E-B-A-C-B-D ; C-A-F-E-B-D-C-B-A-E-D ; C-D-B-C-A-B-E-A-F-E-D ; C-A-F-E-A-B-C-D-B-E-D.

2°) Écrire ci-contre la matrice d'adjacence M de *G* en classant les sommets par ordre alphabétique.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Combien y a-t-il de trajets permettant de relier les monuments A et D en utilisant au maximum trois liaisons ? Justifier.

1ère méthode :

Les trajets possibles sont A-C-D, A-C-B-D, A-B-C-D, A-B-D, A-B-E-D, A-E-D, A-E-B-D, A-F-E-D.
Il y a donc 8 trajets possibles permettant de relier les monuments A et D en utilisant au maximum trois liaisons.

2e méthode :

On utilise les puissances d'exposants 2 et 3 de la matrice d'adjacence.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 9 & 5 & 10 & 6 \\ 10 & 8 & 8 & 8 & 10 & 4 \\ 9 & 8 & 4 & 8 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 8 & 4 & 9 & 4 \\ 10 & 10 & 5 & 9 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Il y a 0 trajet reliant A à D en une liaison, 3 trajets en deux liaisons et 5 trajets en trois liaisons. Il y a donc 8 trajets reliant A et D en utilisant au maximum trois liaisons.

Variante :

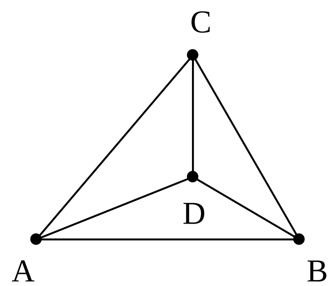
$$M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 11 & 8 & 13 & 8 \\ 13 & 12 & 11 & 11 & 13 & 6 \\ 11 & 11 & 7 & 10 & 8 & 5 \\ 8 & 11 & 10 & 7 & 11 & 5 \\ 13 & 13 & 8 & 11 & 10 & 8 \\ 8 & 6 & 5 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Il y a donc 8 trajets de A à D qui utilisent au maximum 3 liaisons.

III.

Soit *G* un graphe non orienté d'ordre *n* où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note (C) la condition « tous les sommets de *G* sont de degré 3 ».

1°) On suppose que $n = 4$.
Représenter ci-contre un graphe *G* vérifiant la condition (C).
On notera les sommets A, B, C, D.



On peut noter que le graphe *G* est complet.

2°) On revient au cas général où est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On suppose que *G* vérifie la condition (C). *n* est-il pair ou impair ? Justifier.

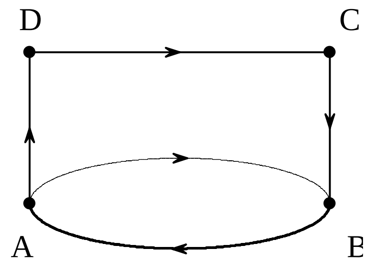
On sait que la somme des degrés des sommets de *G* est égale au double du nombre d'arêtes *G* (lemme des « poignées de mains ») qui a pour conséquence que la somme des degrés des sommets de *G* est un nombre pair.
Or la somme des degrés des sommets de *G* est $3n$.
Donc $3n$ est un nombre pair.

Il y a deux méthodes pour conclure.

1^ère^ méthode :
Si n est impair, alors $3n$ est impair.
Par conséquent, n est pair.

2^e^ méthode :
2 divise $3n$ donc, comme 2 est premier avec 3, d'après le théorème de Gauss, 2 divise n.
Par conséquent, n est pair.

IV.



On considère le graphe orienté *G* ci-contre.

1°) Quelle est la distance de B à C ? 3 (une seule réponse sans égalité)

Le plus court chemin de B à C est : B → A → D → C.
On peut écrire $\mathrm{d}_G(\mathrm{B}\,;\mathrm{C}) = 3$.

2°) Écrire ci-contre la matrice d'adjacence M associée à *G* en classant les sommets par ordre alphabétique.

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3°) Vrai ou faux ? Répondre dans la colonne de droite sans justifier en écrivant les lettres V ou F.

Tout chemin de A à B possède un nombre impair d'arêtes.	V
G est un graphe hamiltonien.	V
G est un graphe eulérien.	F

● Tout chemin de A à B possède un nombre impair d'arêtes.

On répond de manière intuitive à cette question.

● G est un graphe hamiltonien.

Le graphe G possède un circuit (ou un cycle) hamiltonien, c'est-à-dire passant par tous les sommets une fois et une seule :

A → D → C → B (le sommet B est relié à A par un arc).

G est donc un graphe hamiltonien.

● G est un graphe eulérien.

Une chemin eulérien est un chemin de G qui contient une et une seule fois chaque arc de G.

G admet une chemin eulérien (A → D → C → B → A → B) mais pas de circuit eulérien.

G est un graphe semi-eulérien.
On répond à cette question de manière intuitive. Il existe néanmoins un théorème pour les graphes orientés (non donné dans le cours).