T experts

Devoir pour le lundi 3 mai 2021

Le plan complexe *P* est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note *f* l'application de *P* dans lui-même qui à tout point M d'affixe *z* associe le point M' d'affixe $z' = 2z - z^2$.
Le point M' est l'image de M par *f* ; on peut écrire $\text{M}' = f\left(\text{M}\right)$.
On note A le point de *P* d'affixe 1.

1°) Quels sont les points invariants par *f* ? Répondre en rédigeant soigneusement sous la forme d'une chaîne d'équivalences.
On rappelle qu'un point invariant est un point confondu avec son image.

2°) Soit M un point d'affixe *z* et M' son image par *f* d'affixe z'.
On note N le point d'affixe $z_{\text{N}} = z^2$.
Que représente le point M pour le segment $\left[\text{NM}'\right]$?

3°) On suppose que le point M ayant pour affixe *z* appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
On résoudra les questions sans utiliser la forme algébrique de *z*.
a) Démontrer que N appartient à $\mathcal{C}$.
b) Comparer les distances AM et MN.
c) Justifier la construction suivante à la règle non graduée et au compas de l'image d'un point M quelconque de $\mathcal{C}$ distinct de A.

> On trace le cercle Γ de centre M passant par A. Ce cercle recoupe le cercle $\mathcal{C}$ au point N.
> Tracer ensuite la droite $\left(\text{MN}\right)$. M' est le deuxième point d'intersection de $\left(\text{MN}\right)$ et de Γ.

Réaliser un graphique en prenant 4 cm pour unité de longueur puis effectuer la construction pour un point M quelconque de $\mathcal{C}$ distinct de A.

4°) On note $\mathcal{C}'$ l'image de $\mathcal{C}$ par *f* (on peut écrire $\mathcal{C}' = f\left(\mathcal{C}\right)$). On rappelle que $\mathcal{C}'$ est la courbe décrite par M' lorsque M décrit $\mathcal{C}$.
Réaliser un nouveau graphique en prenant 4 cm pour unité de longueur.
Tracer $\mathcal{C}$ puis construire $\mathcal{C}'$ point par point en utilisant la méthode de la question 3°) c).

On pose $z = \text{e}^{\text{i}\theta}$ où θ est un réel quelconque.
Déterminer une équation paramétrique complexe de $\mathcal{C}'$ puis un système d'équations paramétriques de $\mathcal{C}'$.
Tracer alors $\mathcal{C}'$ sur l'écran de la calculatrice (en utilisant le « mode paramétrique »).

La courbe $\mathcal{C}'$ est appelée une cardioïde. Il s'agit d'une courbe célèbre pour laquelle les mathématiciens ont démontré plusieurs propriétés comme la longueur (problème de rectification), l'aire du domaine limité par cette courbe (problème de quadrature), construction géométrique des tangentes, etc.
Faire des recherches sur cette courbe.

Partie facultative :

1°) Réaliser une figure sur *Geogebra*.
Placer les points A et O puis le cercle $\mathcal{C}$.
Créer un point M de $\mathcal{C}$ puis construire les points N et M' selon le procédé ci-dessus.
Faire « bouger » M sur le cercle $\mathcal{C}$ et faire apparaître la courbe $\mathcal{C}'$ en utilisant l'option « Afficher la trace ».

2°) On reprend les notations de la question 3°).
Démontrer que M' est le symétrique de A par rapport à la tangente *T* en M à $\mathcal{C}$.
Indication : On commencera par déterminer la nature du triangle $\text{AM}'\text{N}$.

En déduire une nouvelle construction géométrique simple de M' (toujours à la règle et au compas) pour un point M quelconque de $\mathcal{C}$.
On pourrait utiliser cette construction sur *Geogebra*.

3°) Déterminer une équation de $\mathcal{C}$.

Corrigé du devoir pour le 3-5-2021

1°)

On cherche les points $M \in P$ invariants par *f* c'est-à-dire tels que $M' = M$.

Cela revient donc à chercher les nombres complexes *z* tels que $z' = z \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 2z - z^2 = z$

$\Leftrightarrow z - z^2 = 0$

$\Leftrightarrow z(1-z) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$

Les points invariants par *f* sont donc les points d'affixes 0 et 1 c'est-à-dire A et O.

2°)

$$\frac{z_N + z_{M'}}{2} = \frac{z^2 + z'}{2}$$

$$= \frac{\cancel{z^2} + 2z - \cancel{z^2}}{2}$$

$$= z$$

$$= z_M$$

On en déduit que M est le milieu du segment $[NM']$.

On peut donc dire que M' est le symétrique de N par rapport à M.

N.-B. : On ne peut pas utiliser les distances et donc les modules pour résoudre cette question.

3°)

a)
Le point M a pour affixe *z* et appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 ce qui permet d'écrire $|z| = 1$.

Le point N a pour affixe $z_N = z^2$, donc $|z_N| = |z^2| = |z|^2$.

Or $|z| = 1$ donc $|z_N| = 1$ ce qui permet de conclure que N appartient au cercle $\mathcal{C}$.

b)
$AM = |z - 1|$

$MN = |z_N - z| = |z^2 - z| = |z(z-1)| = |z| \times |z-1|$

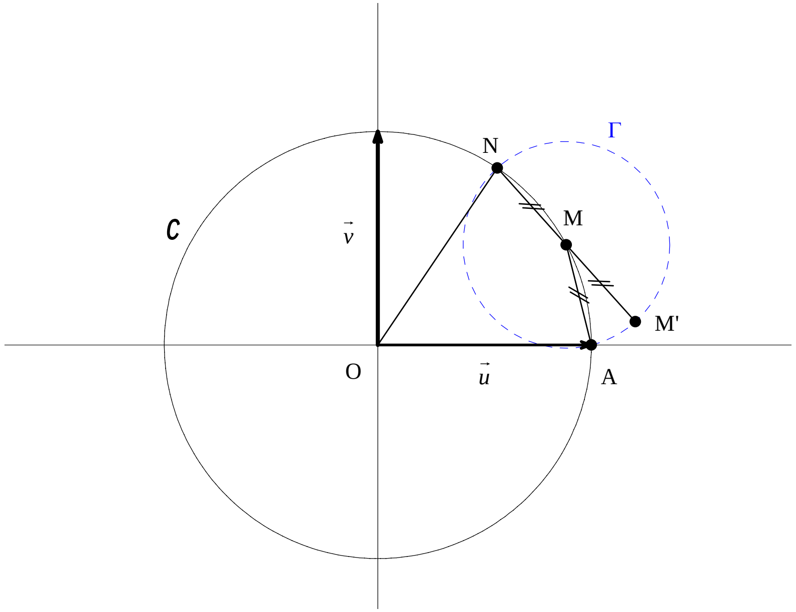
Or $|z| = 1$ donc on a $MN = |z-1|$.

On peut donc écrire $AM = MN = |z-1|$.

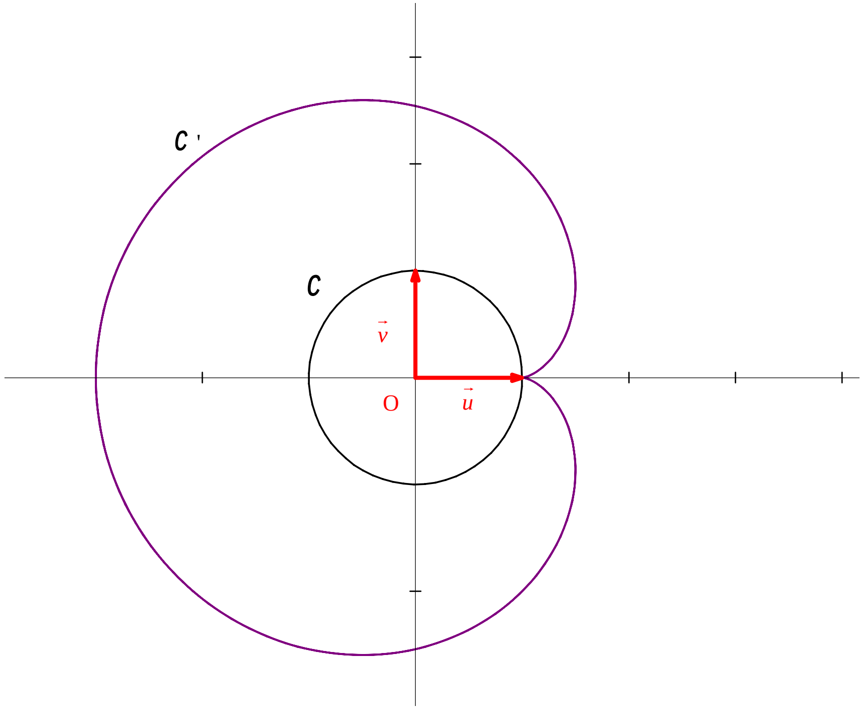
c) D'après la question 3°) a), comme $M \in \mathcal{C}$, on a aussi $N \in \mathcal{C}$.

D'après la question 3°) b), $AM = MN$ donc N appartient au cercle Γ de centre M passant par A.
On a supposé que point M est distinct de A donc $z \neq 1$ ce qui entraîne immédiatement que $z^2 \neq 1$.
Ainsi, N est distinct de A. Le point N est donc bien le point en lequel Γ recoupe $\mathcal{C}$.

La droite (MN) passe par le centre de Γ. Elle recoupe donc $\mathcal{C}$ en un point M' tel que M soit le milieu de $[NM']$.



4°)



On a $z' = 2e^{i\theta} - \left(e^{i\theta}\right)^2$ soit $z' = 2e^{i\theta} - e^{i2\theta}$.

Une équation paramétrique complexe de $\mathcal{C}$ ' est donc $z = 2e^{i\theta} - e^{i2\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ (on peut mettre $\theta \in [0\,;2\pi]$).

Un système d'équations paramétriques de $\mathcal{C}$ ' est donc $\begin{cases} x = 2\cos\theta - \cos 2\theta \\ y = 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{cases}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Partie facultative :

1°) Réaliser une figure sur *Geogebra*.
Placer les points A et O puis le cercle $\mathcal{C}$.
Créer un point M de $\mathcal{C}$ puis construire les points N et M' selon le procédé ci-dessus.
Faire « bouger » M sur le cercle $\mathcal{C}$ et faire apparaître la courbe $\mathcal{C}$ ' en utilisant l'option « Afficher la trace ».

2°) On reprend les notations de la question 3°).
Démontrer que M' est le symétrique de A par rapport à la tangente T en M à $\mathcal{C}$.
Indication : On commencera par déterminer la nature du triangle AM'N.

En déduire une nouvelle construction géométrique simple de M' (toujours à la règle et au compas) pour un point M quelconque de $\mathcal{C}$.
On pourrait utiliser cette construction sur *Geogebra*.

Le triangle AM'N est rectangle en A.
On a (OM) est la médiatrice de $[\mathrm{AN}]$ donc $(\mathrm{OM}) \perp (\mathrm{AN})$.

Or $T \perp (\mathrm{OM})$ donc $T \,/\!/\, (\mathrm{AN})$.

Comme $(\mathrm{AM'}) \perp (\mathrm{AN})$.
On en déduit que $T \,/\!/\, (\mathrm{AM'})$.
Comme M est le centre du cercle circonscrit au triangle AM'N, T est la médiatrice de $[\mathrm{AM'}]$.
D'où le résultat.