Terminale experts

Interrogation écrite du mardi 16 mars 2021

Durée : 50 minutes
- Fiche
- Calculatrice autorisée

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Déterminer sans justifier une écriture exponentielle du nombre complexe $z=3+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

2°) Soit z' le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $-\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'écriture algébrique de z'.

$z=$ ………. $z'=$ ……….

II. (9 points : 1°) 2 points ; 2°) 4 points + 1 point ; 3°) 1 point + 1 point ; 4°) bonus sur 1 point)

On considère la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres complexes.

On pose $\mathrm{U}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$.   ……………………………………………

1°) Démontrer que $\mathrm{A}=\alpha\mathrm{U}+\beta\mathrm{V}$ avec $\alpha=a+\mathrm{i}b$ et $\beta=a-\mathrm{i}b$.   ……………………………………………

2°) Calculer U^2, V^2, UV et VU. On donnera les résultats sous forme simplifiée.
Que peut-on dire des puissances de U et de V d'exposant entier naturel supérieur ou égal à 1 ?

$\mathrm{U}^2=$	$\mathrm{V}^2=$	UV =	VU =

………

3°) En déduire A^n pour n entier naturel quelconque en fonction de n, U, V, α et β.
Écrire enfin A^n pour n entier naturel quelconque sous forme d'une seule matrice dont les coefficients seront donnés en fonction de n, α et β.

………

………

………

4°) Bonus : On pose $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ où θ est un réel.

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $M^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$. Indication : appliquer le résultat du 3°).

……

……

III. (3 points)

Soit a et b deux entiers naturels dont le PGCD est égal à 7.
On sait que, dans l'algorithme d'Euclide, les quotients successifs sont 3, 1, 1, 2 en commençant par la division euclidienne de a par b et en écrivant la dernière division de reste nul.
Donner les valeurs de a et b.

…………………………

Écrire dans le cadre ci-dessous l'algorithme d'Euclide complet pour les valeurs de a et b.

……………………………………

……………………………………

……………………………………

……………………………………

IV. (4 points : 2 points + 2 points)

Déterminer un inverse de 5 modulo 27 (méthode au choix).

…. (une seule réponse sans égalité)

Déterminer l'ensemble E des entiers relatifs x vérifiant $5x \equiv -2$ (mod. 27).
On rédigera sous la forme d'une chaîne d'équivalences : $x \in E \Leftrightarrow \ldots$.

……

……

……

Corrigé de l'interrogation écrite du 16-3-2021

I.

1°) Déterminer sans justifier une écriture exponentielle du nombre complexe $z = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

2°) Soit z' le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $-\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'écriture algébrique de z'.

$$z = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \qquad\qquad z' = 1 - \mathrm{i}$$

On peut vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

$z = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ (On met en facteur le module de z que l'on peut éventuellement avoir calculé à part)

$= 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ (On reconnaît une valeur remarquable pour le cosinus et le sinus)

On a écrit z sous forme trigonométrique faisant apparaître le module et un argument, ce qui permet d'écrire immédiatement z sous forme exponentielle.

Pour z', on sait que $z' = 1 - \mathrm{i}$ et $\arg z' = \dfrac{\pi}{6} \ (2\pi)$.

On peut donc écrire $z' = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$ (forme trigonométrique).

Or $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On en déduit que $z' = 1 - \mathrm{i}$.

II.

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres complexes.

On pose $\mathrm{U} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que $\mathrm{A} = \alpha\mathrm{U} + \beta\mathrm{V}$ avec $\alpha = a + \mathrm{i}b$ et $\beta = a - \mathrm{i}b$.

$$\alpha U+\beta V=\alpha\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}+\beta\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha+\beta & i(\alpha-\beta)\\ i(\beta-\alpha) & \alpha+\beta\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2a & i\times 2ib\\ i\times(-2ib) & 2a\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2a & -2b\\ 2b & 2a\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

$$=A$$

2°) Calculer U^2, V^2, UV et VU. On donnera les résultats sous forme simplifiée.
Que peut-on dire des puissances de U et de V d'exposant entier naturel supérieur ou égal à 1 ?

$U^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}$	$V^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}$	$UV=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$VU=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$U^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2i\\ -2i & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}$$

$$V^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -2i\\ 2i & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}$$

$$UV=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$UV=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

On constate que $U^2=U$ et $V^2=V$.

On en déduit, grâce à une propriété du cours, que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad U^n=U$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad V^n=V$.

3°) En déduire A^n pour n entier naturel quelconque en fonction de n, U, V, α et β.
Écrire enfin A^n pour n entier naturel quelconque sous forme d'une seule matrice dont les coefficients seront donnés en fonction de n, α et β.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=(\alpha U+\beta V)^n$$

Comme $UV=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $VU=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, on a $(\alpha U)(\beta V)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $(\beta V)(\alpha U)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

On peut donc appliquer une propriété du cours obtenue par simplification du binôme de Newton.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=(\alpha U)^n+(\beta V)^n$

$=\alpha^n U^n+\beta^n V^n$ (On applique la propriété du cours $(\alpha U)^n=\alpha^n U^n$; idem pour V)

Or $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad U^n=U$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad V^n=V$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad A^n=\alpha^n U+\beta^n V$.

On peut ensuite vérifier assez aisément que cette formule reste vraie pour $n=0$.

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=\alpha^n U+\beta^n V$.

On finit la question en remplaçant U et V par leurs « expressions ».

$\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=\alpha^n\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&i\\-i&1\end{pmatrix}+\beta^n\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-i\\i&1\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha^n+\beta^n & i(\alpha^n-\beta^n)\\ i(\beta^n-\alpha^n) & \alpha^n+\beta^n\end{pmatrix}$

4°) Bonus : On pose $M=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ où θ est un réel.

Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a $M^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$. Indication : appliquer le résultat du 3°).

On applique le résultat de la question 3°) avec $a=\cos\theta$ et $b=\sin\theta$.

On a $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ et $\beta=\cos\theta-i\sin\theta=e^{-i\theta}$.

On a alors $\forall n\in\mathbb{N}\quad \alpha^n=e^{in\theta}$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad \beta^n=e^{-in\theta}$.

On utilise les formules d'Euler $\forall n\in\mathbb{N}\quad \alpha^n+\beta^n=e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos n\theta$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad \alpha^n-\beta^n=e^{in\theta}-e^{-in\theta}=-2i\sin n\theta$.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad M^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\cos n\theta & -2\sin n\theta\\ 2\sin n\theta & 2\cos n\theta\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$

III.

Soit *a* et *b* deux entiers naturels dont le PGCD est égal à 7.
On sait que, dans l'algorithme d'Euclide, les quotients successifs sont 3, 1, 1, 2 en commençant par la division euclidienne de *a* par *b* et en écrivant la dernière division de reste nul.
Donner les valeurs de *a* et *b*.

$$a = 126 \text{ et } b = 35$$

Écrire dans le cadre ci-dessous l'algorithme d'Euclide complet pour les valeurs de *a* et *b*.

$$126 = 35 \times 3 + 21$$

$$35 = 21 \times 1 + 14$$

$$21 = 14 \times 1 + 7$$

$$14 = 7 \times 2 + 0$$

Pour trouver, on peut écrire :

$a = b \times 3 + r$

$b = r \times 1 + r'$

$r = r' \times 1 + 7$ (car $\text{PGCD}(a\,;b) = 7$ par hypothèse)

$r' = 7 \times 1 + 0$

On trouve $r' = 14$, $r = 21$, $b = 35$ et $a = 126$.

IV.

Déterminer un inverse de 5 modulo 27 (méthode au choix).

11 (une seule réponse sans égalité)

On peut tout d'abord noter que 5 et 27 sont premiers entre eux, donc on sait, d'après une propriété du cours, que 5 admet un inverse modulo 27.
Il y a plusieurs méthodes pour déterminer cet inverse.
1ère méthode : On peut trouver cet inverse en le devinant.
2e méthode : On rentre la fonction $\text{Y1} = \text{reste}(5\text{X}, 27)$ dans la calculatrice.
3e méthode : On peut aussi passer par une relation de Bezout.

Déterminer l'ensemble E des entiers relatifs x vérifiant $5x \equiv -2$ (mod. 27).
On rédigera sous la forme d'une chaîne d'équivalences : $x \in E \Leftrightarrow \ldots$.

$x \in E \Leftrightarrow x \equiv -2 \times 11$ (mod. 27) [propriété fondamentale du cours]

$\Leftrightarrow x \equiv -22$ (mod. 27) [on peut éventuellement s'arrêter là]

$\Leftrightarrow x \equiv 5$ (mod. 27) [car $-22 \equiv 5$ (mod. 27)]

E est l'ensemble des entiers relatifs congrus à 5 modulo 27.

On peut aussi dire que E est l'ensemble des entiers relatifs de la forme $5 + 27k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Fin du corrigé de l'interrogation écrite du 16-3-2021

$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

On pose $\alpha = a + \mathrm{i}b$ et $\beta = a - \mathrm{i}b$ et on considère les matrices $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et.

Bonne version (le 20-3-2021)

Calculer AP puis P-1AP.

$P^{-1} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$

$P^{-1} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b - \mathrm{i}a & a + \mathrm{i}b \\ b + \mathrm{i}a & a - \mathrm{i}b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a + \mathrm{i}b & 0 \\ 0 & a - \mathrm{i}b \end{pmatrix}$

1°) On pose $P = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

……

……

Calculer AP.

……

………

On admet que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où $\alpha = a + \mathrm{i}b$ et $\beta = a - \mathrm{i}b$.

En déduire A^n pour n entier naturel quelconque. On donnera le résultat en fonction de n, α et β.

………

………

2°) On pose $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$ où θ est un réel.

À l'aide du résultat de la question précédente, démontrer que pour tout entier naturel n, on a
$M^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\cos n\theta \\ \sin n\theta & \sin n\theta \end{pmatrix}$.

………

………

On pose $U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que $A = \alpha U + \beta V$ avec $\alpha = a + \mathrm{i}b$ et $\beta = a - \mathrm{i}b$.

……………………………………………

……………………………………………

2°) Calculer U^2, V^2, UV et VU.
Que peut-on dire des puissances de U et de V d'exposant entier naturel supérieur ou égal à 1 ?

$U^2 =$	$V^2 =$	$UV =$	$VU =$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres complexes.

On peut écrire $A = \frac{1-\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} + \frac{1+\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$.