

Numéro : ..... Prénom et nom : .....

**Note : ..... / 20**

**I. (4 points : 2 points pour le résultat et la démarche du calcul choisi + 1 point + 1 point)**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace tels que  $\|\vec{u}\| = 1$ ,  $\|\vec{v}\| = 4$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$ .

Compléter les égalités suivantes (un seul résultat à chaque fois) et détailler l'un des deux calculs au choix.

$$(3\vec{u} - \vec{v})^2 = \dots$$

$$(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \dots$$

.....

.....

.....

.....

.....

Déterminer  $\|3\vec{u} - \vec{v}\|$ .

..... (une seule égalité)

**II. (2 points)**

On considère la fonction  $f: x \mapsto 3e^{2x-1}$ .

On rappelle que pour tout entier naturel  $n$ ,  $f^{(n)}$  désigne la dérivée  $n$ -ième de  $f$ .

Exprimer  $f^{(n)}(x)$  en fonction de  $x$  et de  $n$ .

..... (une seule égalité)

**III. (4 points : 1 point par réponse)**

Une urne contient cinq boules bleues, quatre boules jaunes et deux boules rouges.

On tire successivement et sans remise trois boules dans l'urne.

Compléter la colonne de droite du tableau au verso en écrivant chaque fois un seul résultat, sans égalité.

Quel est le nombre total de tirages ?	.....
Quel est le nombre de tirages comportant au moins une boule bleue ?	.....
Quel est le nombre de tirages ne comportant que des boules bleues ?	.....
Quel est le nombre de tirages constitués de boules de la même couleur ?	.....

**IV. (4 points : 1 point par réponse)**

Dans une entreprise, le service du personnel compte 8 hommes et 6 femmes. On désire faire un sondage. Pour cela, on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

Compléter la colonne de droite du tableau ci-dessous en écrivant chaque fois un seul résultat, sans égalité.

Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?	.....
Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun homme ?	.....
Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un homme ?	.....
Quel est le nombre d'échantillons ne contenant que des personnes de même sexe ?	.....

**V. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)**

On pose  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et on considère un entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1.

On note  $S$  l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture en base dix comporte  $n$  chiffres pris dans  $E$ , un même chiffre pouvant être répété plusieurs fois.

On écrira chaque fois le résultat sans égalité.

On donnera les résultats en fonction de  $n$  pour les questions 1°) et 2°).

1°) Combien y a-t-il d'éléments dans  $S$  ?

.....

2°) Combien y a-t-il de nombres pairs dans  $S$  ?

.....

3°) Dans cette question, on prend  $n = 4$ .

Combien y a-t-il d'éléments de  $S$  strictement inférieurs à 3000 ?

.....

# Corrigé de l'interrogation écrite du 11-3-2021

## I.

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace tels que  $\|\vec{u}\| = 1$ ,  $\|\vec{v}\| = 4$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$ .

Compléter les égalités suivantes (un seul résultat à chaque fois) et détailler l'un des deux calculs au choix.

$$(3\vec{u} - \vec{v})^2 = 37$$

$$(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = 33$$

$$\begin{aligned} (3\vec{u} - \vec{v})^2 &= (3\vec{u})^2 - 2[(3\vec{u}) \cdot \vec{v}] + \vec{v}^2 \\ &= 9\vec{u}^2 - 2 \times 3(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v}^2 \\ &= 9\|\vec{u}\|^2 - 6(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \\ &= 9 \times 1^2 - 6 \times (-2) + 4^2 \\ &= 9 + 12 + 16 \\ &= 37 \end{aligned}$$

On utilise l'identité remarquable scalaire  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v}^2$  ou  $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{v}^2$ .

On peut aussi appliquer directement la deuxième des deux égalités de développement suivantes où  $a$  et  $b$  sont des réels :

$$(a\vec{u} + b\vec{v})^2 = a^2\vec{u}^2 + 2ab(\vec{u} \cdot \vec{v}) + b^2\vec{v}^2 ; (a\vec{u} - b\vec{v})^2 = a^2\vec{u}^2 - 2ab(\vec{u} \cdot \vec{v}) + b^2\vec{v}^2 .$$

$$(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot (-\vec{u}) + (2\vec{v}) \cdot \vec{v} + (2\vec{v}) \cdot (-\vec{u}) \quad (\text{on développe}) \quad \text{Cette ligne est facultative}$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u}^2 + 2\vec{v}^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad [\text{on utilise la propriété } (a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = (ab)(\vec{u} \cdot \vec{v}) ; \text{ par exemple } (2\vec{v}) \cdot (-\vec{u}) = -2(\vec{u} \cdot \vec{v})]$$

$$= -\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u}^2 + 2\vec{v}^2 \quad [\text{on réduit}] \quad \text{Cette ligne est obligatoire.}$$

$$= -(-2) - 1^2 + 2 \times 4^2$$

$$= 2 - 1 + 32$$

$$= 33$$

Déterminer  $\|3\vec{u} - \vec{v}\|$ .

$$\|3\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{37} \text{ (une seule égalité)}$$

On sait que  $\|3\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (3\vec{u} - \vec{v})^2$  (le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de la norme) donc  $\|3\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 37$ .

Or  $\|3\vec{u} - \vec{v}\| \geq 0$ .

Par conséquent,  $\|3\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{37}$ .

Attention,  $\|3\vec{u} - \vec{v}\|$  n'est pas égal à  $3\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$ .

Avec ce raisonnement, on trouverait  $-1$ , résultat absurde puisque la norme d'un vecteur est positive ou nulle.

---

## II.

On considère la fonction  $f: x \mapsto 3e^{2x-1}$ .

On rappelle que pour tout entier naturel  $n$ ,  $f^{(n)}$  désigne la dérivée  $n$ -ième de  $f$ .

Exprimer  $f^{(n)}(x)$  en fonction de  $x$  et de  $n$ .

$$f^{(n)}(x) = 3 \times 2^n \times e^{2x-1} \text{ (une seule égalité)}$$

On trouve aisément ce résultat en calculant la dérivée première de  $f$ , puis sa dérivée seconde, sa dérivée troisième jusqu'à avoir une idée précise du résultat (comprendre la logique).

Une fois conjecturé, le résultat se démontre par récurrence.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3 \times 2 \times e^{2x-1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 3 \times 2 \times 2 \times e^{2x-1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(3)}(x) = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times e^{2x-1}$$

---

## III.

Une urne contient cinq boules bleues, quatre boules jaunes et deux boules rouges.

On tire successivement et sans remise trois boules dans l'urne.

Compléter la colonne de droite du tableau au verso en écrivant chaque fois un seul résultat, sans égalité.

Quel est le nombre total de tirages ?	990
Quel est le nombre de tirages comportant au moins une boule bleue ?	870
Quel est le nombre de tirages ne comportant que des boules bleues ?	60
Quel est le nombre de tirages constitués de boules de la même couleur ?	84

Il s'agit d'un exercice de dénombrement.

- Nombre total de tirages :

La première chose à observer est qu'il y a un ordre (l'énoncé dit « On tire successivement et sans remise ». Il y a donc bien un ordre. C'est une déduction immédiate de l'énoncé).

On utilise donc la méthode des cases.

On tient compte ensuite du fait qu'il s'agit d'un tirage sans remise.

Il y a 11 boules au total dans l'urne.

1 <sup>er</sup> tirage	2 <sup>e</sup> tirage	3 <sup>e</sup> tirage
11	10	9

On effectue le produit  $11 \times 10 \times 9 = 990$ .

- Nombre de tirages comportant au moins une boule bleue :

1<sup>ère</sup> méthode :

On calcule le nombre de tirages ne comportant aucune boule bleue.

6	5	4
---	---	---

On retire le résultat au nombre total de tirages.

$$990 - 6 \times 5 \times 4 = 990 - 120 = 870$$

2<sup>e</sup> méthode :

On calcule le nombre de tirages comportant exactement 3 boules bleues, exactement 2 boules bleues, exactement 1 boule bleue.

On effectue la somme.

Les calculs ne sont néanmoins pas simples du tout.

- Nombre de tirages ne comportant que des boules bleues :

5	4	3
---	---	---

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

- Nombre de tirages constitués de boules de la même couleur :

Il s'agit des tirages constitués de 3 boules bleues ou de 3 boules jaunes.

$$\begin{array}{c} 5 \times 4 \times 3 + 4 \times 3 \times 2 = 60 + 24 = 84 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 3 \text{ boules bleues} \quad 3 \text{ boules jaunes} \end{array}$$

#### IV.

Dans une entreprise, le service du personnel compte 8 hommes et 6 femmes. On désire faire un sondage. Pour cela, on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

Compléter la colonne de droite du tableau ci-dessous en écrivant chaque fois un seul résultat, sans égalité.

Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?	1001
Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun homme ?	15
Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un homme ?	986
Quel est le nombre d'échantillons ne contenant que des personnes de même sexe ?	85

Il n'y a pas d'ordre.

La situation peut s'assimiler à un tirage simultané. On utilise donc les combinaisons.

Nombre d'échantillons différents possibles : on choisit 4 personnes parmi les 14 personnes.	$\binom{14}{4}$
Nombre d'échantillons ne contenant aucun homme : on choisit 4 personnes parmi les 6 femmes.	$\binom{6}{4}$
Nombre d'échantillons contenant au moins un homme : on effectue la différence entre le nombre total d'échantillons et le nombre d'échantillons ne contenant aucun homme.	$\binom{14}{4} - \binom{6}{4}$
Nombre d'échantillons ne contenant que des personnes de même sexe : on additionne le nombre d'échantillons ne contenant que des hommes et le nombre d'échantillons ne contenant que des femmes.	$\binom{8}{4} + \binom{6}{4}$

#### V.

On pose  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et on considère un entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1.

On note  $S$  l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture en base dix comporte  $n$  chiffres pris dans  $E$ , un même chiffre pouvant être répété plusieurs fois.

On écrira chaque fois le résultat sans égalité.

On donnera les résultats en fonction de  $n$  pour les questions 1°) et 2°).

1°) Combien y a-t-il d'éléments dans  $S$  ?

$$5^n$$

Il y a 5 choix possibles pour chaque chiffre. On calcule donc  $5 \times 5 \times \dots \times 5$  ( $n$  facteurs) soit  $5^n$ .

2°) Combien y a-t-il de nombres pairs dans  $S$  ?

$$2 \times 5^{n-1}$$

Il y a deux choix possibles, 2 ou 4, pour le dernier chiffre et 5 choix possibles pour tous les autres chiffres.

3°) Dans cette question, on prend  $n = 4$ .

Combien y a-t-il d'éléments de  $S$  strictement inférieurs à 3000 ?

250

Le chiffre des milliers est strictement inférieur à 3. Il y a donc deux possibilités : 1 ou 2.

chiffre des milliers	chiffre des centaines	chiffre des dizaines	chiffre des unités
----------------------------	-----------------------------	----------------------------	--------------------------

2	5	5	5
---	---	---	---

Il y a  $2 \times 5^3 = 250$  résultats possibles.