Terminale experts

Interrogation écrite du mardi 9 mars 2021

Durée : 30 minutes
- Fiche
- Calculatrice autorisée

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………….……………………………

Note : ….. / 20

I. (9 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points ; 4°) 2 points)

À tout réel t on associe la matrice $\mathrm{M}(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que pour tout couple $(x\,;\,y)$ de réels, on a $\mathrm{M}(x)\mathrm{M}(y)=\mathrm{M}(x+y)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Généraliser sans justifier la formule de la question précédente pour un produit $\mathrm{M}(x_1)\mathrm{M}(x_2)...\mathrm{M}(x_n)$ où x_1, x_2, …, x_n sont n réels quelconques (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).
On écrira directement l'égalité sur la ligne ci-dessous.

……………………………………………………………………………………………………

3°) À l'aide de la question précédente, déterminer la matrice $\left[\mathrm{M}(x)\right]^n$, pour x réel quelconque et n entier naturel quelconque.

…………………………………………………………

4°) On pose $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{J}=\begin{pmatrix}0 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Que peut-on dire des puissances de I et de J d'exposant entier naturel ?
Justifier brièvement.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Bonus sur 1 point à traiter sur copie s'il reste du temps :
En observant que $\mathrm{M}(x)=\mathrm{I}+\mathrm{J}$ et en utilisant la formule du binôme de Newton, retrouver $\left[\mathrm{M}(x)\right]^n$.

II. (5 points : 2 points + 3 points)

Écrire l'algorithme d'Euclide pour les nombres 2021 et 1645. En déduire leur PGCD (écrire une égalité ici).

……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………
……………………………………

………………………………………………………….

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour écrire une égalité de Bezout entre les nombres 2021 et 1645.
La méthode est laissée au choix. On pourra par exemple utiliser la méthode par tableau (à présenter dans ce cas).

III. (5 points : 2 points + 3 points)

On note *f* l'application définie sur $\mathbb{Z}$ par $f(n) = \text{PGCD}(n\,;4)$ pour tout entier relatif *n*.

Quelles sont les valeurs possibles de $f(n)$? ……………….……….. (répondre sans phrase)

Compléter la colonne de droite du tableau ci-dessous en écrivant chaque fois une égalité de la forme $f(n) = ...$.

• 1$^{\text{er}}$ cas : *n* est de la forme 4*k* avec $k \in \mathbb{Z}$	
• 2$^{\text{e}}$ cas : *n* est de la forme $4k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$	
• 3$^{\text{e}}$ cas : *n* est de la forme $4k+2$ avec $k \in \mathbb{Z}$	
• 4$^{\text{e}}$ cas : *n* est de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{Z}$	

À l'aide de la propriété donnant le PGCD de *ka* et *kb* où *a* et *b* sont des entiers relatifs non tous les deux nuls et *k* un entier naturel non nul, démontrer le résultat du 3$^{\text{e}}$ cas.

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

Corrigé de l'interrogation écrite du 9-3-2021

I.

À tout réel t on associe la matrice $\mathrm{M}(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que pour tout couple $(x\,;y)$ de réels, on a $\mathrm{M}(x)\mathrm{M}(y)=\mathrm{M}(x+y)$.

$$\forall (x\,;y)\in\mathbb{R}^2 \quad \mathrm{M}(x)\mathrm{M}(y)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & x+y\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{M}(x+y)$$

2°) Généraliser sans justifier la formule de la question précédente pour un produit $\mathrm{M}(x_1)\mathrm{M}(x_2)...\mathrm{M}(x_n)$ où x_1, x_2, …, x_n sont n réels quelconques (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).
On écrira directement l'égalité sur la ligne ci-dessous.

$$\mathrm{M}(x_1)\mathrm{M}(x_2)...\mathrm{M}(x_n)=\mathrm{M}(x_1+x_2+...+x_n)$$

On peut écrire $\displaystyle\prod_{i=0}^{i=n}\mathrm{M}(x_i)=\mathrm{M}\left(\sum_{i=1}^{i=n}x_i\right)$ (le symbole Π sert à écrire $\mathrm{M}(x_1)\mathrm{M}(x_2)...\mathrm{M}(x_n)=\displaystyle\prod_{i=0}^{i=n}\mathrm{M}(x_i)$).

3°) À l'aide de la question précédente, déterminer la matrice $\left[\mathrm{M}(x)\right]^n$, pour x réel quelconque et n entier naturel quelconque.

$$\left[\mathrm{M}(x)\right]^n=\mathrm{M}(nx)$$

4°) On pose $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{J}=\begin{pmatrix}0 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Que peut-on dire des puissances de I et de J d'exposant entier naturel ?
Justifier brièvement.

Comme I est la matrice identité d'ordre 2, on peut dire que toutes les puissances sont aussi égales à I.

$\forall n\in\mathbb{N} \quad \mathrm{I}^n=\mathrm{I}$.

On a $\mathrm{J}^2=\begin{pmatrix}0 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ donc pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, $\mathrm{J}^n=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
J est une matrice nilpotente.

Bonus sur 1 point à traiter sur copie s'il reste du temps :

En observant que $\mathrm{M}(x)=\mathrm{I}+\mathrm{J}$ et en utilisant la formule du binôme de Newton, retrouver $\left[\mathrm{M}(x)\right]^n$.

Soit n un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

On peut écrire $\left[\mathrm{M}(x)\right]^n=(\mathrm{J}+\mathrm{I})^n$ et, comme les matrices I et J commutent (on sait que la matrice I commute avec toute matrice), il est possible d'appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\left[\mathrm{M}(x)\right]^n=(\mathrm{J}+\mathrm{I})^n$$

$$=\sum_{k=0}^{k=m}\binom{n}{k}\mathrm{J}^k\mathrm{I}^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\mathrm{J}^k$$

$=\binom{n}{0}\mathrm{J}^0+\binom{n}{1}\mathrm{J}^1$ (on sait que toutes les puissances de J d'exposant entier naturel supérieur ou égal à 2 sont nulles)

$=\mathrm{I}+n\mathrm{J}$ (car $\binom{n}{0}=1$ et $\binom{n}{1}=n$)

$$=\begin{pmatrix}1 & nx\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{M}(nx)$$

On vérifie que cette formule reste valable pour $n=0$ et $n=1$.

II.

Écrire l'algorithme d'Euclide pour les nombres 2021 et 1645. En déduire leur PGCD (écrire une égalité ici).

$2021=1645\times1+376$
$1645=376\times4+141$
$376=141\times2+94$
$141=94\times1+47$
$94=47\times2+0$

$\mathrm{PGCD}(2021\,;1645)=47$

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour écrire une égalité de Bezout entre les nombres 2021 et 1645.
La méthode est laissée au choix. On pourra par exemple utiliser la méthode par tableau (à présenter dans ce cas).

On vérifie la valeur du PGCD grâce à la calculatrice.

		2021	1645		
2021	L_1	1	0		
1645	L_2	0	1		
376	L_3	1	– 1	$L_3 \leftarrow L_1 - 1 \times L_2$	$2021 = 1645 \times 1 + 376$
141	L_4	– 4	5	$L_4 \leftarrow L_2 - 4 \times L_3$	$1645 = 376 \times 4 + 141$
94	L_5	9	– 11	$L_5 \leftarrow L_3 - 2 \times L_4$	$376 = 141 \times 2 + 94$
47	L_6	– 13	16	$L_5 \leftarrow L_4 - 1 \times L_5$	$141 = 94 \times 1 + 47$
		$\uparrow$ u	$\uparrow$ v		

Une égalité de Bezout entre les nombres 2021 et 1645 est $2021 \times (-13) + 1645 \times 16 = 47$.

Autre méthode possible :

On remonte l'algorithme d'Euclide.

III.

On note *f* l'application définie sur $\mathbb{Z}$ par $f(n) = \text{PGCD}(n\,;4)$ pour tout entier relatif *n*.

Quelles sont les valeurs possibles de $f(n)$? 1, 2, 4 (répondre sans phrase)

Compléter la colonne de droite du tableau ci-dessous en écrivant chaque fois une égalité de la forme $f(n) = \ldots$.

• 1$^{\text{er}}$ cas : n est de la forme $4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$f(n) = 4$
• 2$^{\text{e}}$ cas : n est de la forme $4k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$f(n) = 1$
• 3$^{\text{e}}$ cas : n est de la forme $4k+2$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$f(n) = 2$
• 4$^{\text{e}}$ cas : n est de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$f(n) = 1$

À l'aide de la propriété donnant le PGCD de *ka* et *kb* où *a* et *b* sont des entiers relatifs non tous les deux nuls et *k* un entier naturel non nul, démontrer le résultat du 3$^{\text{e}}$ cas.

Soit *n* un entier relatif quelconque de la forme $4k+2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$f(n) = \text{PGCD}(4k+2\,;4)$

$= 2 \times \text{PGCD}(2k+1\,;2)$

$= 2 \times 1$ $\quad$ ($\text{PGCD}(2k+1\,;2) = 1$ car $2k+1$ est un entier relatif impair)

$= 2$

On peut démontrer les 4 cas en utilisant le lemme d'Euclide.

Par exemple, dans le deuxième cas, $f(n) = \mathrm{PGCD}(4k+2\,;4) = \mathrm{PGCD}(4k+2-4k\,;4) = \mathrm{PGCD}(2\,;4) = 2$.