T spécialité

Interrogation écrite du jeudi 4 mars 2021

Durée : 30 minutes
- Fiche autorisée
- Calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 3-\sqrt{e^{2x}-1}$.
Compléter les pointillés :

L'ensemble de définition de f est ………. ; l'ensemble de dérivabilité de f est ……….

$\forall x \in$ ………. $f'(x) =$ ……………………. (un seul résultat) $f(\ln 3) =$ ……………… (valeur exacte)

II. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{2}{x}}$.
Compléter les égalités : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ …… $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ …….
Justifier la deuxième limite sur les deux lignes ci-dessous en présentant convenablement.

………..

………..

III. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2e^{1-x}$. Les deux questions sont indépendantes.
1°) Compléter l'égalité : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ …… . Justifier cette limite sur les deux lignes ci-dessous.

………..

………..

2°) On admet que f est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty\,;0]$ et $[2\,;+\infty[$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.
Démontrer que l'équation $f(x)=2 \quad (\mathrm{E})$ admet une unique solution dans l'intervalle $I=[0\,;1]$.
Rédiger avec le plus grand soin selon le modèle étudié.
On donnera notamment le nom du théorème utilisé.

………..

………..

………..

………..

IV. (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + \sin x$.
Étudier la convexité de *f*. On attend une démarche assez concise.

………..

………..

………..

………..

V. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + x - \mathrm{e}^x$.
1°) Compléter les pointillés : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ...$. Justifier cette limite sur les deux lignes ci-dessous.

………..

………..

2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Démontrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion I dont on donnera l'abscisse.

………..

………..

………..

Question bonus à traiter sur copie : Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une parabole Γ dont on donnera une équation pour courbe asymptote en $-\infty$.

Corrigé de l'interrogation écrite du 4-3-2021

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto 3-\sqrt{e^{2x}-1}$.
Compléter les pointillés :

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$; l'ensemble de dérivabilité de f est $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = -\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ (un seul résultat) $\qquad f(\ln 3) = 3-2\sqrt{2}$ (valeur exacte)

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{2}{x}}$.

Compléter les égalités : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$.

Justifier la deuxième limite sur les deux lignes ci-dessous en présentant convenablement.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \underbrace{\left(-\dfrac{2}{x}\right)}_{X} = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty.$$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2e^{1-x}$. Les deux questions sont indépendantes.

1°) Compléter l'égalité : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Justifier cette limite sur les deux lignes ci-dessous.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty \text{ (limite de composée très simple)} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

On ne tient pas compte du 3 qui est strictement positif et qui ne change pas le résultat de la limite.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{(1-x)}_{X} = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty.$$

2°) On admet que f est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty\,;0]$ et $[2\,;+\infty[$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.

Démontrer que l'équation $f(x) = 2 \quad (\text{E})$ admet une unique solution dans l'intervalle $I = [0\,;1]$.
Rédiger avec le plus grand soin selon le modèle étudié.
On donnera notamment le nom du théorème utilisé.

C_1 : *f* est continue sur *I* (propriétés d'opérations sur les fonctions continues).
C_2 : $f(0)=3\times 0^2\times \mathrm{e}^{1-0}=0$ et $f(1)=3\times 1^2\times \mathrm{e}^{1-1}=3$ donc 2 est compris entre 0 et 3.
C_3 : *f* est <u>strictement</u> croissante sur $[0\,;2]$ donc, par restriction, sur *I* puisque $I\subset[0\,;2]$.

f vérifie les conditions C_1, C_2, C_3 donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution dans *I*.
Les conditions C_1 et C_2 assurent l'existence, la condition C_3 assure l'unicité.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2+\sin x$.
Étudier la convexité de *f*. On attend une démarche assez concise.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=2x+\cos x$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f''(x)=2-\sin x$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\leqslant \sin x\leqslant 1$ donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad \sin x\leqslant 2$ (l'inégalité est même stricte).

On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R}\quad f''(x)\geqslant 0$ ce qui permet d'affirmer que *f* est convexe sur $\mathbb{R}$.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2+x-\mathrm{e}^x$.
1°) Compléter les pointillés : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. Justifier cette limite sur les deux lignes ci-dessous.

On effectue une réécriture pour lever la forme indéterminée que l'on rencontre (forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ »).

$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(x)=x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)$

On utilise ensuite la limite de référence $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}=+\infty$.

2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Démontrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion I dont on donnera l'abscisse.

La fonction *f* est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=2x+1-\mathrm{e}^x$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f''(x)=2-\mathrm{e}^x$

Le signe de $f''(x)$ n'est pas constant : il dépend des valeurs de *x*.

Pour étudier le signe de $f''(x)$, on résout deux inéquations et une équation.

$f''(x)<0 \quad (1)$	$f''(x)>0 \quad (2)$	$f''(x)=0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow 2-\mathrm{e}^x<0$ $\Leftrightarrow \mathrm{e}^x>2$ $\Leftrightarrow x>\ln 2$	$(2) \Leftrightarrow 2-\mathrm{e}^x>0$ $\Leftrightarrow \mathrm{e}^x<2$ $\Leftrightarrow x<\ln 2$	$(3) \Leftrightarrow 2-\mathrm{e}^x=0$ $\Leftrightarrow \mathrm{e}^x=2$ $\Leftrightarrow x=\ln 2$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	

f vérifie les conditions suivantes :

C_1 : f'' s'annule pour $x=\ln 2$;

C_2 : f'' change de signe pour $x=\ln 2$.

$\mathcal{C}$ admet donc le point I d'abscisse ln 2 pour point d'inflexion.

Question bonus à traiter sur copie : Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une parabole Γ dont on donnera une équation pour courbe asymptote en – ∞.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x)-\left(x^2+x\right) \right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc on en déduit que $\mathcal{C}$ admet la parabole Γ d'équation $y=x^2+x$ pour courbe asymptote en – ∞.