Terminale experts

Interrogation écrite du mardi 2 mars 2021

Durée : 15 minutes
- Fiche
- Calculatrice autorisée

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On note *f* l'application qui à tout entier naturel non nul associe le nombre de chiffres de son écriture en base quatre.

1°) Écrire le nombre 27 en base quatre ; en déduire $f(27)$.

$$27 = \overline{\ldots\ldots\ldots}^{(4)} \quad \text{donc } f(27) = \ldots\ldots$$

2°) Écrire, sans la démontrer, l'expression de $f(n)$ en fonction de *n* ($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque).

………………………………

3°) À l'aide de l'expression de *f*, calculer $f(27)$ et $f(2021)$.
Pour $f(27)$, vérifier que l'on retrouve bien le résultat de la question 1°).

……………………………………………………… ………………………………………………………

II. (5 points)

On note *g* l'application définie sur $\mathbb{N}$ par $g(n) = \text{PGCD}(n^2 + n\,;\, 2n + 2)$ pour tout entier naturel *n*.
Le but de l'exercice est d'exprimer $g(n)$ en fonction de *n*.

Rappeler la propriété suivante où *a* et *b* sont deux entiers relatifs non tous les deux nuls et *k* est un entier naturel non nul.

$$\text{PGCD}(ka\,;\,kb) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

À l'aide de cette égalité, écrire une autre expression de $g(n)$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad g(n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

En déduire $g(n)$ en fonction de *n* suivant les valeurs de *n* en distinguant deux cas.

- Si *n* est ………… , alors $g(n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

- Si *n* est ………… , alors $g(n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

III. (3 points)

Compléter la fonction Python ci-contre qui prend pour arguments deux entiers naturels a et b, b étant non nul, et qui renvoie la valeur de leur PGCD.

```
def pgcd(a,b):
    while ……… :
          a, b = b, a%b
    ………………….
```

IV. (3 points)

À l'aide d'une propriété du cours, compléter l'implication suivante où a est un entier relatif quelconque. Justifier brièvement sur les lignes ci-dessous. On donnera le nom de la propriété utilisée.

$$6 \text{ divise } 25a \Rightarrow \text{……….}$$

………..

………..

V. (3 points)

Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a > b$. Déterminer $\delta = \text{PGCD}\left(a-b\,;\,a^2-b^2\right)$.

………..

………..

VI. (2 points)

Soit a et b deux entiers relatifs premiers entre eux.
On souhaite démontrer que tout entier relatif n s'écrit comme combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs.
On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui permettent de démontrer ce résultat.

① En multipliant les deux membres de (1) par n, on obtient l'égalité : $anu + bnv = n \quad (2)$.

② On en déduit que (2) donne une écriture de n comme combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs.

③ Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1 \quad (1)$.

④ Comme a, b, n sont des entiers relatifs, nu et nv sont aussi des entiers relatifs.

Remettre les phrases dans l'ordre en écrivant uniquement les numéros sur la ligne ci-dessous.

………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 2-3-2021

I.

On note *f* l'application qui à tout entier naturel non nul associe le nombre de chiffres de son écriture en base quatre.

1°) Écrire le nombre 27 en base quatre ; en déduire $f(27)$.

$$27 = \overline{123}^{(4)} \text{ donc } f(27) = 3$$

2°) Écrire, sans la démontrer, l'expression de $f(n)$ en fonction de n ($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque).

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) = \mathrm{E}(\log_4 n) + 1$$

$\log_4 n$ désigne le logarithme de base 4 de n.

Par définition, on a $\log_4 n = \dfrac{\ln n}{\ln 4}$.

3°) À l'aide de l'expression de *f*, calculer $f(27)$ et $f(2021)$.

Pour $f(27)$, vérifier que l'on retrouve bien le résultat de la question 1°).

$$f(27) = \mathrm{E}(\log_4 27) + 1 = 2 + 1 = 3 \qquad\qquad f(2021) = \mathrm{E}(\log_4 2021) + 1 = 5 + 1 = 6$$

On utilise la calculatrice pour calculer les logarithmes de base 4 de 27 et 2021.

II.

On note g l'application définie sur $\mathbb{N}$ par $g(n) = \mathrm{PGCD}(n^2 + n \,;\, 2n + 2)$ pour tout entier naturel n.

Le but de l'exercice est d'exprimer $g(n)$ en fonction de n.

Rappeler la propriété suivante où a et b sont deux entiers relatifs non tous les deux nuls et k est un entier naturel non nul.

$$\mathrm{PGCD}(ka \,;\, kb) = k\mathrm{PGCD}(a \,;\, b)$$

À l'aide de cette égalité, écrire une autre expression de $g(n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g(n) = (n+1) \times \mathrm{PGCD}(n \,;\, 2)$$

En déduire $g(n)$ en fonction de n suivant les valeurs de n en distinguant deux cas.

- Si n est pair, alors $g(n) = 2n + 2$.

- Si n est impair, alors $g(n) = n + 1$.

III.

Compléter la fonction Python ci-contre qui prend pour arguments deux entiers naturels *a* et *b*, *b* étant non nul, et qui renvoie la valeur de leur PGCD.

```
def pgcd(a,b):

    while b !=0 :

          a, b = b, a%b

    return a
```

IV.

À l'aide d'une propriété du cours, compléter l'implication suivante où *a* est un entier relatif quelconque. Justifier brièvement sur les lignes ci-dessous. On donnera le nom de la propriété utilisée.

$$6 \text{ divise } 25a \Rightarrow 6 \text{ divise } a$$

D'après le théorème de Gauss, comme 6 divise le produit 25*a* et que 6 est premier avec 25, alors 6 divise *a*.

V.

Soit *a* et *b* deux entiers relatifs tels que $a > b$. Déterminer $\delta = \text{PGCD}\left(a-b\,;\,a^2-b^2\right)$.

1ère méthode : Il s'agit de la meilleure méthode.

On a $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
Comme *a* et *b* sont des entiers relatifs par hypothèse, $a+b$ est un entier relatif. On en déduit que $a-b$ divise a^2-b^2.
De plus, comme $a>b$ par hypothèse, $a-b$ est un entier naturel non nul.

On en déduit, d'après une propriété du cours, que $\delta = a-b$.

2e méthode :

$\delta = \text{PGCD}\left(a-b\,;\,a^2-b^2\right)$

$= \text{PGCD}\left(a-b\,;\,(a-b)(a+b)\right)$

$= (a-b)\underbrace{\text{PGCD}(1\,;\,a+b)}_{1}$ (en effet, comme $a>b$ par hypothèse, $a-b$ est un entier naturel non nul)

$= (a-b)\times 1$

$= a-b$

VI.

Soit a et b deux entiers relatifs premiers entre eux.
On souhaite démontrer que tout entier relatif n s'écrit comme combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs.
On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui permettent de démontrer ce résultat.

① En multipliant les deux membres de (1) par n, on obtient l'égalité : $anu+bnv=n \quad (2)$.

② On en déduit que (2) donne une écriture de n comme combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs.

③ Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1 \quad (1)$.

④ Comme a, b, n sont des entiers relatifs, nu et nv sont aussi des entiers relatifs.

Remettre les phrases dans l'ordre en écrivant uniquement les numéros sur la ligne ci-dessous.

③ ① ④ ②