T experts

Devoir pour le lundi 1er février 2021

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………..…………………………….

Note : ….. / 20

I. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres complexes.

1°) On pose $\alpha = a + b$ et $\beta = a - b$ et on considère les matrices $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

Calculer $P^{-1}BP$. Que remarque-t-on ?

En déduire A^n pour n entier naturel quelconque. On donnera le résultat en fonction de n, α et β.

Vérifier en utilisant le site dcode.

2°) Dans cette question, on suppose que $a = b$.
Calculer A^2 et en déduire A^n pour n entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1 (sans utiliser le résultat de la question précédente).

Vérifier que le résultat coïncide avec celui de la question 1°).

II. Pour toute matrice carrée M d'ordre 2 à coefficients réels, on note $s(M)$ la somme des coefficients de M.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1°) Déterminer $s(A^k)$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$. On donnera uniquement les résultats sans détailler les calculs.

………

2°) Écrire une fonction Python `seuil(M)` qui prend pour argument un réel M supérieur ou égal à 10 et qui renvoie le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $s(A^k) \geqslant M$.

On utilisera un calcul itératif de A^k.

À l'aide de cette fonction, déterminer le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $s(A^k) \geqslant 2021$.

Corrigé du devoir pour le 1-2-2021

I. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres complexes.

1°) On pose $\alpha = a+b$ et $\beta = a-b$ et on considère les matrices $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

$\det P = 2$ donc P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}BP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

On constate que $P^{-1}BP = A$.

En déduire A^n pour n entier naturel quelconque. On donnera le résultat en fonction de n, α et β.

Vérifier en utilisant le site dcode.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = P^{-1}B^nP$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha^n & -\beta^n \\ \alpha^n & \beta^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha^n+\beta^n & \alpha^n-\beta^n \\ \alpha^n-\beta^n & \alpha^n+\beta^n \end{pmatrix}$$

On vérifie le résultat avec le site dcode.

2°) Dans cette question, on suppose que $a = b$.
Calculer A^2 et en déduire A^n pour n entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1 (sans utiliser le résultat de la question précédente).
Vérifier que le résultat coïncide avec celui de la question 1°).

On a $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}$$

On constate que $A^2 = 2aA$. Une propriété du cours permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = (2a)^{n-1}A$ soit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = (2a)^{n-1}A = \begin{pmatrix} 2^{n-1}a^n & 2^{n-1}a^n \\ 2^{n-1}a^n & 2^{n-1}a^n \end{pmatrix}.$$

Avec la formule du 1°), on a $\alpha = 2a$ et $\beta = 0$. On retrouve la même expression.

II. Pour toute matrice carrée M d'ordre 2 à coefficients réels, on note $s(M)$ la somme des coefficients de M.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1°) Déterminer $s(A^k)$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$. On donnera uniquement les résultats sans détailler les calculs.

$s(A^1) = 10$ $\qquad$ $s(A^2) = 54$ $\qquad$ $s(A^3) = 290$

2°) Écrire une fonction Python `seuil(M)` qui prend pour argument un réel M supérieur ou égal à 10 et qui renvoie le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $s(A^k) \geqslant M$.
On utilisera un calcul itératif de A^k.
À l'aide de cette fonction, déterminer le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $s(A^k) \geqslant 2021$.

```
from numpy import matrix,dot

A=matrix([[1, 2],[3, 4]])

def seuil(M):
    k=1
    B=A
    while B.sum()<M:
          B=A*B
          k+=1
    return k
```

Le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $s(A^k) \geqslant 2021$ est 5.

On utilise la bibliothèque numpy.

• On peut utiliser matrix (uniquement parce qu'il s'agit de matrices carrées d'ordre 2) ou array (valable quelles que soient les dimensions de la matrice).

• Avec matrix, le produit de deux matrices s'obtient avec l'opérateur `*`.
On écrit l'instruction `B=A*B` ou `B=B*A`.

Avec array, le produit de deux matrices s'obtient avec la fonction `dot`.
On écrit donc l'instruction `B=dot(A,B)` ou `B=dot(B,A)`.