T spé

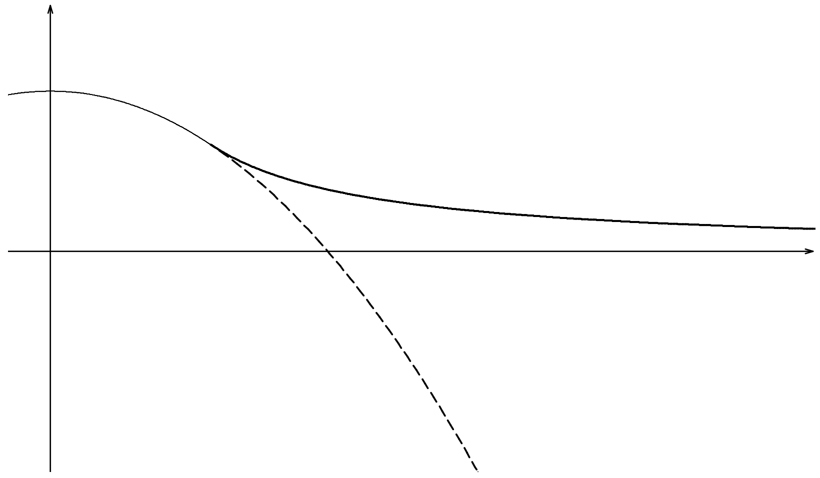
Convexité des fonctions

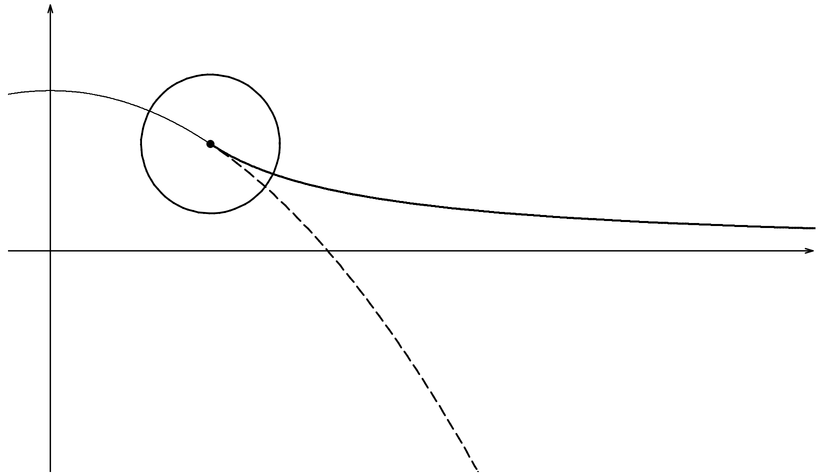
Plan du chapitre :

Le 11-2-2023

épidémie :

nombre de cas en fonction du temps





La courbe « s'infléchit » (verbe « s'infléchir »).

Le 25-3-2023

Inégalité des tangentes

$f(x) \geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$

Le 11-2-2023

inflectere (verbe latin) $\rightarrow$ inflexio $\rightarrow$ inflexion

se plier

verbe infléchir ou s'infléchir

Le 21-9-2023

inflexion de la voix

Le 4-2-2023

concave

moyen mnémotechnique « va à la cave »

Le 5-2-2024

On peut parler de polygone concave.
En mathématiques, les mots « concave » ou « concavité » sont notamment utilisés :
en analyse, où une fonction concave est une fonction f dont la fonction opposée – f est convexe ;
en géométrie, où un ensemble concave désigne un ensemble qui n'est pas convexe. Cependant le terme concave est déconseillé pour désigner un ensemble non convexe[1,2].
Dans la langue courante, concave signifie creux, soit une forme arrondie vers l'intérieur. Son contraire est convexe ou bombé. Le mot concavité a un sens directement relié au concept mathématique d'ensemble convexe, la concavité d'un objet désignant la partie de celui-ci qui a une forme en creux.
On retrouve ce même sens en optique géométrique, notamment pour qualifier des miroirs ou des lentilles.

CONVEXE, adj.
XIVe siècle. Emprunté du latin convexus, « arrondi, voûté ». Qui présente une partie bombée vers l'extérieur, par opposition à Concave. Un miroir convexe. Une lentille convexe. Des lunettes à verres convexes. • Par anal. GÉOM. Polygone convexe, polygone plan dont les sommets sont dans un même demi-plan par rapport à toute droite contenant un côté du polygone. Polyèdre convexe, dont les faces sont dans un même demi-espace par rapport à tout plan contenant une face du polyèdre. - GÉOGR. La rive convexe d'une rivière, dans un méandre, la rive qui forme une avancée de terre.

Le 5-2-2024

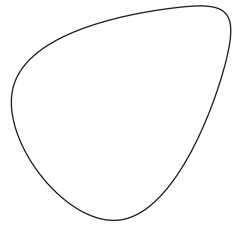
convecteur
génuflexion
réfléchir
réflexion
reflectere « courber en arrière, recourber; ramener », en lat. médiév. « réverbérer (d'un miroir) » ca 1240 ds Latham, dér. de flectere « fléchir, ployer », préf. re- marquant le mouvement en arrière.
Le verbe fléchir a donné le mot flexion.

I. <u>Parties convexes du plan</u>

1°) Définition [partie convexe du plan]

Soit A une partie du plan.

On dit que A est *convexe* pour exprimer que pour tout couple (M, N) de points de A le segment $[\mathrm{MN}]$ est contenu dans A.



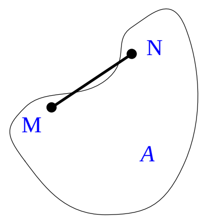
Il est intéressant d'écrire la caractérisation d'une partie non convexe en utilisant la négation de la phrase quantifiée de la définition.

domaine non convexe

$\downarrow$

négation

Une partie A du plan est non convexe lorsqu'il existe au moins un couple (M, N) de points de A tel que le segment $[\mathrm{MN}]$ ne soit pas contenu dans A.



Domaine convexe du plan

Polygone convexe

Un secteur angulaire ….

① figure convexe / non convexe

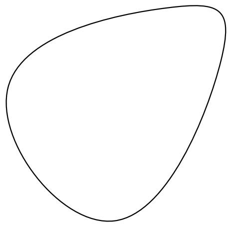


Figure convexe

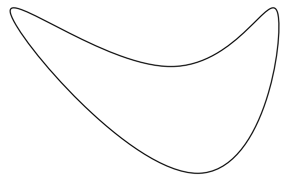
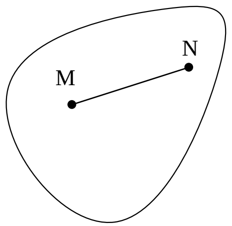
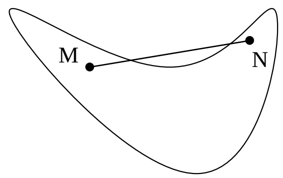
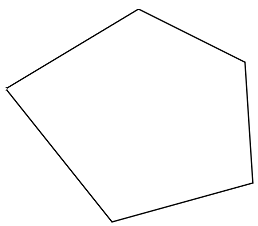


Figure non convexe

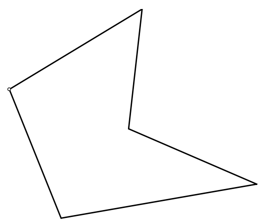




② polygone convexe / non convexe (domaine-zone délimitée par une ligne brisée)



Pentagone convexe



Pentagone non convexe

(cas particulier : quadrilatère convexe / non convexe)

2°) Exemples de parties convexes

• Un segment, une droite, une demi-droite, un demi-plan, un secteur angulaire sont des parties convexes du plan.
La démonstration est assez simple.

• Un disque (ouvert ou fermé) est une partie convexe du plan.
La démonstration peut se faire assez aisément.

3°) Propriété

L'intersection de parties convexes du plan est une partie convexe du plan.

La démonstration est quasiment évidente avec la définition.

Conséquence :

Un secteur angulaire ou une bande de plan sont des parties convexes du plan.
En effet, un secteur angulaire est l'intersection de deux demi-plans dont les frontières sont des droites non parallèles et une bande de plan est l'intersection de deux demi-plans dont les frontières sont des droites parallèles.

Un triangle est une partie convexe du plan.

II. Généralités sur les fonctions convexes

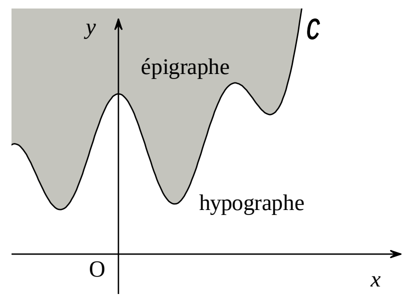
1°) Définition [graphe, épigraphe et hypographe d'une fonction]

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
On se place dans le plan muni d'un repère.

• On appelle *graphe* de f (ou représentation graphique ou courbe représentative) l'ensemble noté $\text{Graphe}(f)$ ou $\mathcal{C}$ des points M de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $x \in D$ et $y = f(x)$.

• On appelle *épigraphe* de f l'ensemble noté $\text{Epi}(f)$ des points M de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $x \in D$ et $y \geqslant f(x)$.

• On appelle *hypographe* de f l'ensemble noté $\text{Hypo}(f)$ des points M de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $x \in D$ et $y \leqslant f(x)$.



On remarquera les racines grecques épi : au-dessus et hypo : au-dessous.

2°) Définition [fonction convexe, fonction concave]

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On se place dans le plan muni d'un repère.

• On dit que f est **convexe** sur I lorsque son épigraphe est une partie convexe du plan.

• On dit que f est **concave** sur I lorsque son hypographe est une partie convexe du plan.

3°) Exemples

• Une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ est à la fois convexe et concave car son épigraphe et son hypographe sont des demi-plans. Or un demi-plan est une partie convexe du plan.

On peut démontrer que les seules fonctions à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions affines.

• La fonction $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$, parce que son épigraphe est un quart de plan (lui-même convexe comme intersection de deux demi-plans).

• La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ mais il est difficile de le justifier avec la seule définition.

Il est souvent malcommode de vérifier la convexité d'une fonction définie par une formule concrète à partir de la seule définition, on attendra donc quelques paragraphes pour donner d'autres exemples, lorsqu'on disposera d'un critère de convexité plus utilisable en pratique.

4°) Propriété (facile à démontrer)

Une fonction f est concave sur I si et seulement si $-f$ est convexe sur I.

Une fonction concave est une fonction dont la fonction opposée est convexe.

III. Cordes et fonctions convexes

1°) Définition [corde de la courbe représentative d'une fonction]

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Une corde est un segment reliant deux points A et B distincts de $\mathcal{C}$.

On retrouve le même vocabulaire que pour le cercle dans le plan.

On peut aussi rappeler le terme de sécante utilisé dans la notion de nombre dérivé d'une fonction.

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Une sécante est une droite joignant deux points A et B distincts de $\mathcal{C}$.

Soit A et B deux points de $\mathcal{C}$.

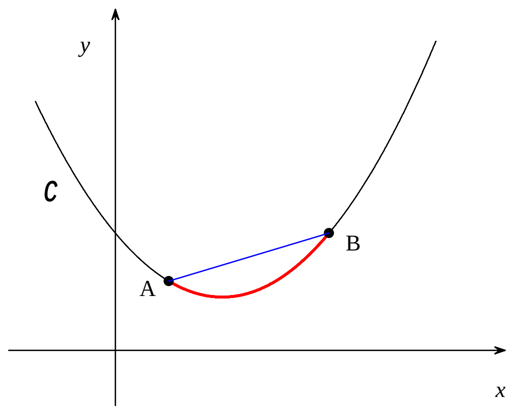
Le segment $[AB]$ est appelé une corde de $\mathcal{C}$.

2°) Propriété [caractérisation des fonctions convexes et concaves sur un intervalle à l'aide des cordes]

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

• f est convexe sur I si et seulement si pour tout couple (A, B) de points $\mathcal{C}$ la portion de la courbe $\mathcal{C}$ située entre les points A et B est au-dessous de la corde $[AB]$.

• f est concave sur I si et seulement si pour tout couple (A, B) de points $\mathcal{C}$ la portion de la courbe $\mathcal{C}$ située entre les points A et B est au-dessus de la corde $[AB]$.



Cette propriété est admise sans démonstration.

3°) Exemple

Avec cette propriété, on retrouve de manière évidente que les fonctions affines sont convexes.

Cette propriété donne une démonstration simple de la propriété « f est concave si et seulement si $-f$ est convexe ».

La suite du cours va nous permettre de démontrer que d'autres fonctions sont convexes ou concaves.

IV. Convexité et dérivation. Propriétés

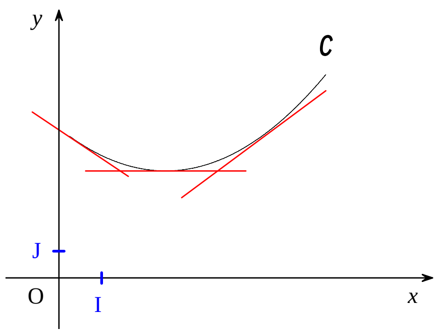
1°) Propriété 1 [caractérisation des fonctions convexes à l'aide des tangentes]

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

• f est convexe sur I si et seulement si $\mathcal{C}$ est au-dessus de ses tangentes.

• f est concave sur I si et seulement si $\mathcal{C}$ est au-dessous de ses tangentes.

Cette propriété est admise sans démonstration.



Les tangentes apparaissent comme des « droites d'appui » de la courbe.
La convexité des fonctions est intéressante pour les tracés de courbes.

2°) Propriété 2 [caractérisation des fonctions convexes dérivables]

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.
• f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
• f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Démonstration de la propriété « f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I ».

● Sens de gauche à droite :

On va démontrer que si f' est croissante sur I, alors f est convexe sur I.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

Soit a un élément quelconque de I. On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.

La tangente T à $\mathcal{C}$ au point A a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Il s'agit d'étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de T.
On va étudier la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x) - \left[f'(a)(x-a)+f(a)\right]$.

On observera que $f(a)$, $f'(a)$, a sont des constantes.

φ est définie sur I et φ est dérivable sur I comme f.
$\forall x \in I \quad \varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$ (on utilise que $f(a)$, $f'(a)$, a sont des constantes).

On va dresser le tableau de variations de φ.

On notera que $\varphi(a) = f(a) - \left[f'(a)(a-a)+f(a)\right] = f(a) - f(a) = 0$ et que $\varphi'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$.

On a supposé que f' est croissante sur I.
Donc :

$\forall x \in I \cap \left]-\infty\,;a\right] \quad f'(x) \leqslant f'(a)$ d'où $\forall x \in I \cap \left]-\infty\,;a\right] \quad \varphi'(x) \leqslant 0$;

$\forall x \in I \cap \left[a\,;+\infty\right[\quad f'(x) \geqslant f'(a)$ d'où $\forall x \in \mathrm{I} \cap \left[a\,;+\infty\right[\quad \varphi'(x) \geqslant 0$.

x		a	
Signe de $\varphi'(x)$	–	0	+
Variations de φ	↘	0	↗
Signe de φ	+	0	+

Ainsi, $\forall x \in I \quad \varphi(x) \geqslant 0$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur I.

● Sens de droite à gauche :

On va admettre que si f est convexe sur I, alors f' est croissante sur I.

Cette propriété donne une façon très simple de justifier la convexité car il suffit d'étudier les variations de f' d'où la propriété 3 qui est une conséquence de la précédente.

3°) Propriété 3 [caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivable]

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.
• f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive ou nulle sur I.
• f est concave sur I si et seulement si f'' est négative ou nulle sur I.

On sait qu'elles sont à la fois convexes et concaves.

Convexité de la fonction « racine carrée » non dérivable en 0

4°) Exemples ; convexité des fonctions de référence

• Les fonctions affines sont convexes et concaves sur $\mathbb{R}$ car leur dérivée seconde est nulle. On retrouve le résultat énoncé dès la définition des fonctions convexes et concaves.

• La fonction « carré » est convexe sur $\mathbb{R}$ (car sa dérivée seconde est la fonction constante égale à 2, donc strictement positive).

• La fonction « cube » est concave sur $\left]-\infty\,;0\right]$ et convexe sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

• La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
On peut utiliser directement ce résultat.

• La fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad \ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad \ln''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, ce qui montre que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad \ln''(x)<0$).
On peut utiliser directement ce résultat.

• Une fonction $f : x\mapsto ax^2+bx+c$ où a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$ est convexe si $a>0$ et concave si $a<0$. En effet, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}\quad f''(x)=2a$.
Ce résultat est à relier avec celui appris en 1$^{\text{ère}}$:
- si $a>0$, la courbe représentative de f dans un repère est une parabole tournée vers le haut ;
- si $a<0$, la courbe représentative de f dans un repère est une parabole tournée vers le bas.

On peut utiliser directement ce résultat sur la convexité des fonctions polynômes du second degré.

• La fonction cosinus est concave sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

• La fonction sinus est concave sur l'intervalle $\left[0\,;\pi\right]$.

5°) Détermination des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée seconde est nulle sur $\mathbb{R}$

Le 17-1-2023

$f''(x)=0$
$f'(x)=a$
$f(x)=ax+b$

On trouve les fonctions affines sur $\mathbb{R}$.

V. Exemple d'étude de la convexité d'une fonction

On considère la fonction $f : x\mapsto x^3-3x^2+4x-4$.
Il s'agit d'une fonction polynôme du troisième degré.

Étudions la convexité de f.

Étudier la convexité d'une fonction revient à déterminer sur quel(s) intervalle(s) elle est convexe et sur quel(s) intervalle(s) elle est concave.

Sur le graphique ci-contre de la fonction f, on peut conjecturer que f est concave sur $\left]-\infty\,;1\right]$ et convexe sur $\left[1\,;+\infty\right[$.

Démontrons ce résultat en dérivant f deux fois.

f est une fonction polynôme donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

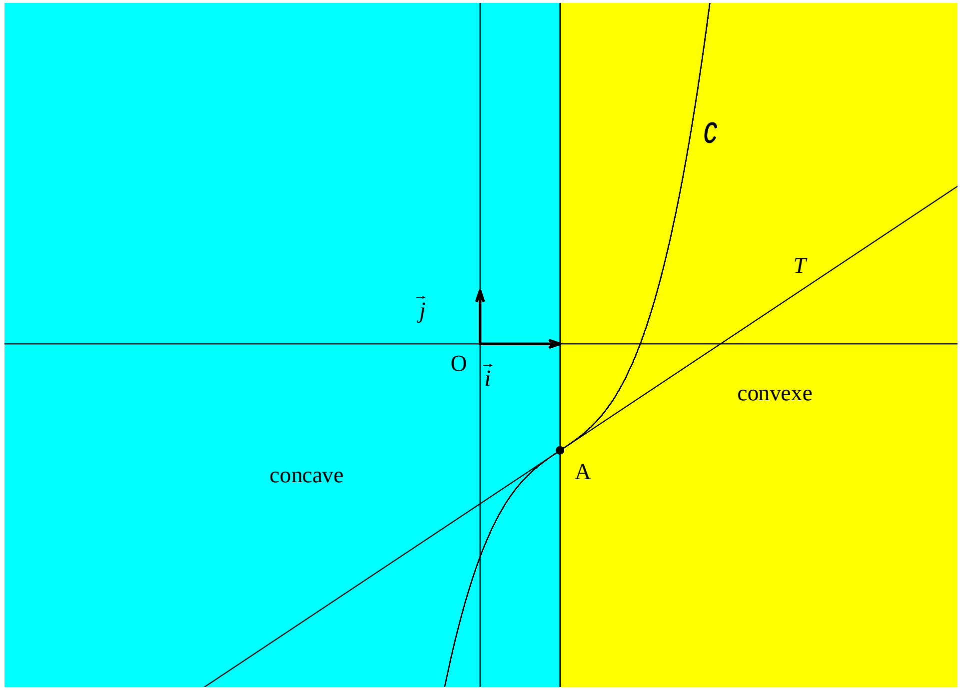
$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=3x^2-6x+4$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f''(x)=6x-6=6(x-1)$

• $\forall x\in\left]-\infty\,;1\right]\quad f''(x)\leqslant 0$ donc f est concave sur $\left]-\infty\,;1\right]$.

• $\forall x\in\left[1\,;+\infty\right[\quad f''(x)\geqslant 0$ donc f est convexe sur $\left[1\,;+\infty\right[$.

De plus en $x=1$, f'' s'annule en changeant de signe donc la courbe représentative de f admet le point d'abscisse 1 pour point d'inflexion.



Commentaires :

On peut éventuellement faire un tableau comprenant trois lignes :
1ère ligne : valeurs de x ;
2e ligne : signe de $f''(x)$;
3e ligne : convexité de f.

On peut mener une étude semblable dans le cas d'une fonction polynôme du troisième degré $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c, d sont quatre réels tels que $a \neq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 6ax + 2b$

La dérivée seconde s'annule en $-\dfrac{b}{3a}$.

VI. Extremums d'une fonction convexe ou concave sur un intervalle

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I non vide et non réduit à un singleton.
On suppose qu'il existe un élément a de I tel que $f'(a) = 0$.

(i) f convexe sur $I \Rightarrow f$ atteint son minimum global en a (et ce minimum vaut $f(a)$).

(ii) f concave sur $I \Rightarrow f$ atteint son maximum global en a (et ce maximum vaut $f(a)$).

Démonstration :

VII. Application à des inégalités (« inégalités de convexité »)

1°) Inégalité des tangentes

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I non vide et non réduit à un singleton.
Soit a un réel fixé dans I.

① Si f est convexe sur I, alors $\forall x \in I \quad f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$.

② Si f est concave sur I, alors $\forall x \in I \quad f(x) \leqslant f'(a)(x-a) + f(a)$.

2°) Application dans deux cas particuliers

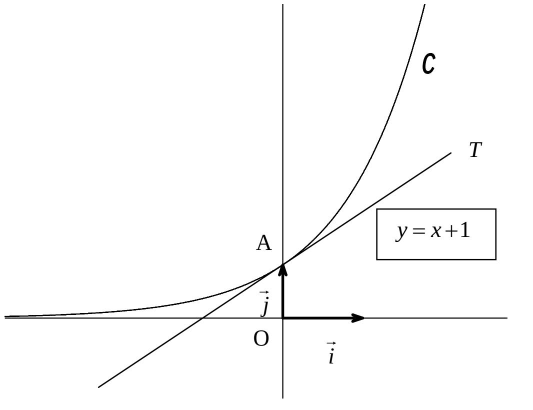
On va utiliser la convexité de fonctions exponentielle et logarithme népérien (fonctions de référence) pour établir des inégalités importantes qui peuvent permettre de démontrer d'autres résultats (par exemple, d'autres inégalités).

● **Fonction exponentielle**

On considère la fonction exponentielle $f : x \mapsto e^x$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

On va s'intéresser au point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0. Ce choix est motivé par l'inégalité importante que l'on veut obtenir.

La tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$.



Comme f est convexe sur $\mathbb{R}$, on peut dire $\mathcal{C}$ est au-dessus de T donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geqslant x + 1$.

On retiendra cette inégalité fondamentale : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geqslant x + 1$.

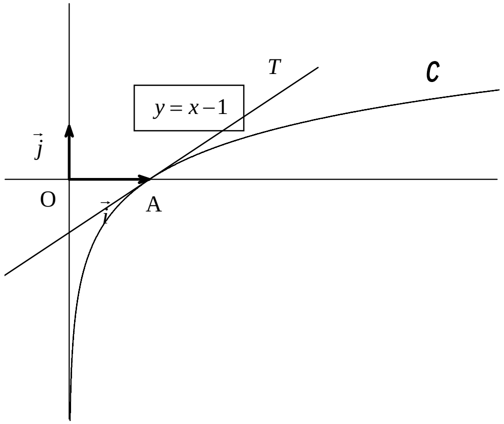
On peut démontrer qu'il y a égalité si et seulement si $x = 0$.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad e^x > x + 1$.

● **Fonction logarithme népérien**

On considère la fonction logarithme népérien et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentation dans le plan muni d'un repère.

On va s'intéresser au point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1. Ce choix est motivé par l'inégalité importante que l'on veut obtenir.

La tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$.



Comme f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut dire $\mathcal{C}$ est au-dessous de T donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leqslant x - 1$.

On retiendra cette inégalité fondamentale : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leqslant x - 1$.

On peut démontrer qu'il y a égalité si et seulement si $x = 1$.

VIII. Point d'inflexion

1°) Définition [point d'inflexion]

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan et A un point de $\mathcal{C}$.

On dit que A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}$ admet une tangente en A et si $\mathcal{C}$ traverse cette tangente en A.

Le 5-2-2024

Une courbe représentative de fonction peut admettre plusieurs points d'inflexion.

La notion est étudiée en chimie dans l'étude des dosages avec les courbes de concentration.
Le point correspondant à l'équivalence est un point d'inflexion de la courbe.
On utilise souvent la méthode des tangentes (tracées approximativement) pour déterminer (approximativement) ce point d'équivalence.

2°) Remarque

En l'abscisse d'un point d'inflexion A de la courbe représentative de f, la fonction change de convexité.

3°) Point d'inflexion et dérivée

Propriété 1 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I non vide et non réduit à un singleton.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Soit a un élément quelconque de I.

Si f' change de variation en a, alors $\mathcal{C}$ admet le point d'abscisse a pour point d'inflexion.

Démonstration :

On utilise :
- la propriété de caractérisation d'une fonction convexe ou concave le sens de variation de f' ;
- la propriété de caractérisation d'une fonction convexe ou concave par la position de courbe représentative par rapport aux tangentes (position relative).

Propriété 2 :

Lorsque f est une fonction deux fois dérivable sur I, les variations de f' s'obtiennent facilement en utilisant le signe de la dérivée de f' c'est-à-dire le signe de f''.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I non vide et non réduit à un singleton.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Soit a un élément quelconque de I.

Si f'' s'annule et change de signe en a, alors $\mathcal{C}$ admet le point d'abscisse a pour point d'inflexion.

4°) Application : méthode pratique pour déterminer les points d'inflexion d'une courbe

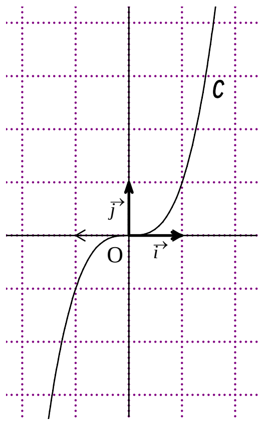
On calcule la dérivée seconde de la fonction.
On étudie son signe dans un tableau de signe.

5°) Exemple

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$.
La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet l'origine du repère pour point d'inflexion.
En effet, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
f'' s'annule et change de signe en 0.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

f'' s'annule et change de signe en 0.



O est point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.
On peut noter que c'est aussi un centre de symétrie pour la courbe car la fonction « cube » est impaire.

6°) Points d'inflexion des courbes représentatives des fonctions polynômes du troisième degré

• Exemple

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4x - 4$. Nous avons déjà étudié la convexité de f.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

f est une fonction polynôme donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signes, f'' vérifie les conditions suivantes :

C_1 : f'' s'annule pour $x = 1$ (unique valeur d'annulation).

C_2 : f'' change de signe en $x = 1$.

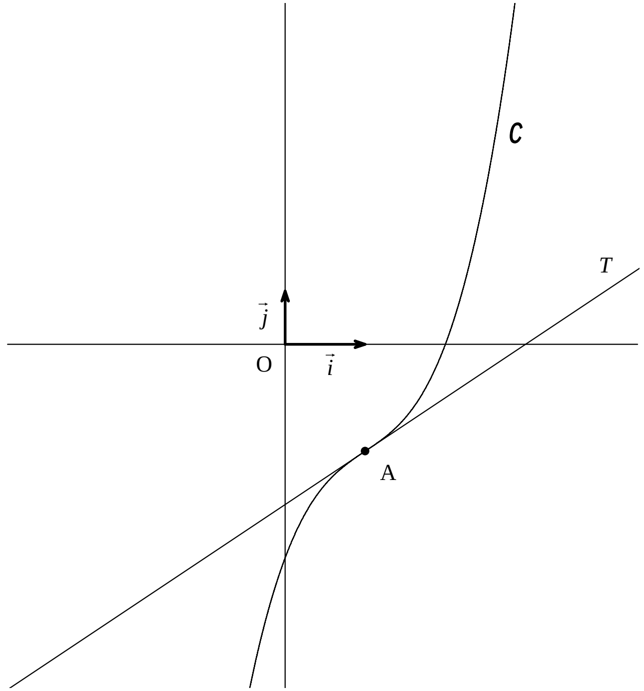
On en déduit que $\mathcal{C}$ admet le point A d'abscisse 1 pour point d'inflexion.

f'' s'annule en changeant de signe en $x = 1$ donc $\mathcal{C}$ admet le point A d'abscisse 1 pour point d'inflexion.

L'ordonnée de A s'obtient en calculant $f(1) = -2$.

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en A est égal à $f'(1) = 1$.
Il s'agit d'une tangente d'inflexion.

On notera les changements de cadre fonctions / graphiques qui se traduisent dans le vocabulaire.



On peut démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point A pour centre de symétrie.

• Cas général

On considère la fonction $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c, d sont trois réels tels que $a \neq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 6ax + 2b$

La dérivée seconde s'annule et change de signe en $-\dfrac{b}{3a}$.

La courbe représentative de f admet le point d'abscisse $-\dfrac{b}{3a}$ pour point d'inflexion.
On peut démontrer que c'est aussi un centre de symétrie pour la courbe (résultat général intéressant mais pas au programme).

Exercices sur la convexité des fonctions

$\boxed{1}$ Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + 1$.
Vérifier sur la calculatrice en traçant la courbe représentative de f.

$\boxed{2}$ Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

$\boxed{3}$ Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x - 3\ln x$.

$\boxed{4}$ Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

$\boxed{5}$ On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 8x + 17)\mathrm{e}^x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer les coordonnées des points d'inflexion éventuels de $\mathcal{C}$.

$\boxed{6}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer les abscisses des points d'inflexion éventuels de $\mathcal{C}$.

$\boxed{7}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Démontrer que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion A dont on calculera les coordonnées.
Calculer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A et puis déterminer une équation de T.

$\boxed{8}$ On considère la fonction $f : x \mapsto 3\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer les coordonnées des points d'inflexion éventuels de $\mathcal{C}$.
Déterminer les coefficients directeurs des tangentes d'inflexion et une équation de chacune de ces tangentes.

$\boxed{9}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer les coordonnées des points d'inflexion éventuels de $\mathcal{C}$.
Déterminer les coefficients directeurs des tangentes d'inflexion et une équation de chacune de ces tangentes.

$\boxed{10}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer les coordonnées des points d'inflexion éventuels de $\mathcal{C}$.
Déterminer les coefficients directeurs des tangentes d'inflexion et une équation de chacune de ces tangentes.

11 1°) On rappelle que pour tout réel x non nul, on a $\mathrm{e}^x > x+1$ (i).

À l'aide de cette inégalité, démontrer que pour tout réel $x<1$, on a $\mathrm{e}^x < \dfrac{1}{1-x}$ (ii).

2°) À l'aide de (i), démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $\mathrm{e} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

3°) À l'aide de (ii), démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $\mathrm{e} < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

En rassemblant les inégalités des questions 2°) et 3°), on obtient l'encadrement suivant de e :

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ pour tout entier naturel n non nul.

On peut démontrer que les suites du membre de gauche et du membre de droite convergent toutes les deux vers e.

12 On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Tracer la partie de la courbe sur l'intervalle $I = [0\,;\pi]$.

2°) Étudier la convexité de f sur I.

3°) À l'aide d'une propriété graphique de $\mathcal{C}$, démontrer que $\forall x \in I \quad \sin x \leqslant x$.

4°) À l'aide d'une autre propriété graphique de $\mathcal{C}$, démontrer que pour tout réel x appartenant à $J = \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$.

13 1°) On rappelle que pour tout réel x strictement supérieur à – 1, on a $\ln(1+x) \leqslant x$ (i).

À l'aide de l'inégalité (i), démontrer que pour tout entier naturel k non nul, on a $\dfrac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln k$.

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k}$.

Démontrer à l'aide de l'inégalité établie à la question précédente que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $S_n \geqslant \ln(n+1)$.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

14 On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Étudier la convexité de f et déterminer les points d'inflexion de $\mathcal{C}$.

Corrigé des exercices sur la convexité des fonctions

1 $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + 1$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

f est une fonction polynôme donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour dériver plus facilement f, on effectue la réécriture $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + 1$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x^2 - 3x + 2$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 2x - 3$

On a donc :

- $\forall x \in \left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right] \quad f''(x) \leqslant 0$ donc f est concave sur $\left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right]$.
- $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[\quad f''(x) \geqslant 0$ donc f est convexe sur $\left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

On a une transition en $x = \dfrac{3}{2}$ (valeur charnière).

On vérifie sur la calculatrice en traçant la courbe représentative de f.

2 $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{-x}$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (opérations sur les fonctions dérivables).

Attention, f n'est pas une fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+1) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$ (formule de dérivation d'un produit)

$= \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x}$ (on peut écrire directement cette ligne)

$= \mathrm{e}^{-x}(1-x-1)$ (on factorise sans développer)

$= -x\mathrm{e}^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = -\left[1 \times e^{-x} + x \times \left(-e^{-x}\right)\right]$ (on laisse la trace de la formule utilisée)

$= -e^{-x}(1-x)$ (on factorise)

$= e^{-x}(x-1)$

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, le signe de $f''(x)$ est donné par celui de $x-1$.

- $\forall x \in]-\infty\,;1] \quad f''(x) \leqslant 0$ donc *f* est concave sur $]-\infty\,;1]$.
- $\forall x \in [1\,;+\infty[\quad f''(x) \geqslant 0$ donc *f* est convexe sur $[1\,;+\infty[$.

3

$f : x \mapsto x^2 + x - 3\ln x$

L'ensemble de définition de *f* est $\mathbb{R}_+^*$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 2x + 1 - \dfrac{3}{x}$

On effectue la réécriture : $f'(x) = 2x + 1 - 3 \times \dfrac{1}{x}$ qui permet de dériver plus commodément :

$f''(x) = 2 - 3 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) = 2 + \dfrac{3}{x^2}$

De manière évidente, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) \geqslant 0$.
On en déduit que *f* est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

On vérifie sur la calculatrice en traçant la courbe représentative de *f*.

4

$f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$

$f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

Pour dériver à nouveau f', il est intéressant d'écrire $f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$ sous forme d'un produit de sorte que l'on puisse utiliser la formule de dérivation d'un produit.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = (x-1)e^x \times \dfrac{1}{x^2}$

On pose $U(x) = (x-1)e^x$ et $V(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

On a $U'(x) = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x = \ldots = xe^x$ (formule de dérivation d'un produit) et $V'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$ (formule de $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$).

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f''(x) = xe^x \times \dfrac{1}{x^2} + (x-1)e^x \times \left(-\dfrac{2}{x^3}\right)$

$= e^x \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{2(x-1)e^x}{x^3}$

$= \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{2(x-1)e^x}{x^3}$

$= \dfrac{x^2e^x - 2(x-1)e^x}{x^3}$

$= \dfrac{x^2 - 2(x-1)}{x^3}e^x$

$= \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3}e^x$

On étudie le signe de $f''(x)$.

On considère le polynôme du second degré $x^2 - 2x + 2$.
Son discriminant réduit est à -1 ($\Delta' = (-1)^2 - 2 = -1$).
Ce polynôme est donc toujours du signe du coefficient de x^2 c'est-à-dire strictement positif.

Par ailleurs, le signe d'une exponentielle est toujours strictement positif.

Le signe de $f''(x)$ est donc le même que celui de x^3.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad f''(x) < 0$.

On en déduit que *f* est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et concave sur $\mathbb{R}_-^*$.

On vérifie sur la calculatrice en traçant la courbe représentative de *f*.

5

$f : x \mapsto \left(x^2 - 8x + 17\right)\mathrm{e}^x$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

f est le produit d'une fonction polynôme par la fonction exponentielle donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (elle est même dérivable autant de fois que l'on veut).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (2x-8)\mathrm{e}^x + \left(x^2 - 8x + 17\right)\mathrm{e}^x$ (formule de dérivation d'un produit

$= \left(x^2 - 6x + 9\right)\mathrm{e}^x$ (on factorise tout de suite sans développer)

$= (x-3)^2\,\mathrm{e}^x$ (on reconnaît une identité remarquable)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 2(x-3)\mathrm{e}^x + (x-3)^2\,\mathrm{e}^x$

$= (x-3)(2+x-3)\mathrm{e}^x$

$= (x-3)(x-1)\mathrm{e}^x$

Le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $(x-3)(x-1)$.

f'' s'annule et change de signe en 1 et 3 donc $\mathcal{C}$ admet les points $\mathrm{A}(1\,;10\mathrm{e})$ et $\mathrm{B}\left(3\,;2\mathrm{e}^3\right)$ pour points d'inflexion.

On calcule les ordonnées des points A et B en utilisant la fonction f :

$y_{\mathrm{A}} = f(1) = (1-8+17)\mathrm{e} = 10\mathrm{e}$

$y_{\mathrm{B}} = f(3) = (9-24+17)\mathrm{e}^3 = 2\mathrm{e}^3$

6

$f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{-x} + x^2 \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$ (formule de dérivation d'un produit

$= \left(2x - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$ (on factorise tout de suite sans développer)

On pourrait factoriser encore plus $f'(x) = x(2-x)\mathrm{e}^{-x}$ mais cela n'aurait pas d'intérêt, et même compliquerait un peu pour la dérivation.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x} + \left(2x - x^2\right) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$

$= \left(2 - 2x - 2x + x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$

$= \left(2 - 4x + x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$

$= \left(x^2 - 4x + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$

Le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $x^2 - 4x + 2$.

On détermine aisément les racines du polynôme $x^2 - 4x + 2$ en utilisant le discriminant réduit (égal à 2).

f'' s'annule et change de signe en $2-\sqrt{2}$ et $2+\sqrt{2}$ (tableau de signes avec le polynôme précédent) donc $\mathcal{C}$ admet les points d'abscisses $2-\sqrt{2}$ et $2+\sqrt{2}$ pour points d'inflexion.

7

$f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2}$

$= \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$= (1 - \ln x) \times \dfrac{1}{x^2}$ (écriture en produit uniquement pour calculer plus commodément la dérivée seconde)

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f''(x) = -\dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x^2} + (1 - \ln x) \times \left(-\dfrac{2}{x^3}\right)$

$= -\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2(1-\ln x)}{x^3}$

$= \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$

De manière évidente, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $2\ln x - 3$.
En effet, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, x^3 est strictement positif.

$2\ln x - 3 < 0 \quad (1)$	$2\ln x - 3 > 0 \quad (2)$	$2\ln x - 3 = 0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow 2\ln x - 3 < 0$ $\Leftrightarrow \ln x < \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow x < e^{\frac{3}{2}}$	$(2) \Leftrightarrow 2\ln x - 3 > 0$ $\Leftrightarrow \ln x > \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow x > e^{\frac{3}{2}}$	$(3) \Leftrightarrow 2\ln x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$

Nous sommes en mesure de dresser le tableau de signes de l'expression.

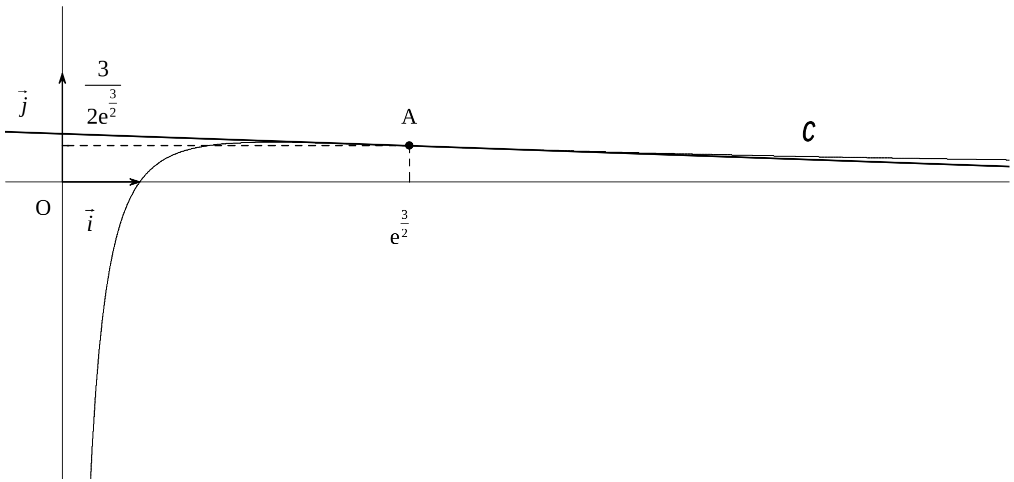
x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

f'' s'annule et change de signe en $e^{\frac{3}{2}}$ donc $\mathcal{C}$ admet le point $A\left(e^{\frac{3}{2}}\,;\,\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$ pour point d'inflexion.

On calcule l'ordonnée de A en utilisant l'expression de f ($f(x) = \frac{\ln x}{x}$).

$$y_A = f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} \quad \text{[on peut aussi écrire } y_A = \frac{3e^{-\frac{3}{2}}}{2} \text{ si l'on veut]}$$

On vérifie sur la calculatrice en traçant la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.
On peut facilement dresser le tableau de variations de f.
f présente un maximum en $x = e$.



On observe que $\mathcal{C}$ est au-dessous de T pour $x < e^{\frac{3}{2}}$ et au-dessus de T pour $x > e^{\frac{3}{2}}$.
On observe que f est concave sur $\left]0\,;\,e^{\frac{3}{2}}\right]$ et convexe sur $\left[e^{\frac{3}{2}}\,;\,+\infty\right[$.

$\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (limite de référence qui sera donnée plus tard : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$) et l'axe des ordonnées pour asymptote verticale en $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ (limite obtenue par limite d'un quotient).

Le coefficient directeur de la tangente en A à $\mathcal{C}$ est $f'\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1 - \ln e^{\frac{3}{2}}}{\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{e^{2 \times \frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{e^3} = -\frac{1}{2e^3}$.

La tangente T en A à $\mathcal{C}$ a pour équation $y = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2e^3}\left(x - e^{\frac{3}{2}}\right)$ (formule donnant l'équation d'une tangente).

On peut développer le second membre, ce qui donne :

$$y = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{2e^3} + \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2e^3}$$

$$y = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{2e^3} + \frac{1}{2e^{3-\frac{3}{2}}} \qquad \left(\text{propriété : } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} = \frac{1}{e^{b-a}}\right)$$

$$y = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{2e^3} + \frac{1}{2e^{\frac{3}{2}}}$$

$$y = \frac{4}{2e^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{2e^3}$$

$$y = \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{2e^3}$$

T a pour équation $y = \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{2e^3}$ (ou encore $y = 2e^{-\frac{3}{2}} - \frac{x}{2}e^{-3}$).

On vérifie sur la calculatrice en utilisant la commande pour tracer une tangente.

En bas de l'écran :

x = e^(1.5)   x = 4.4817   f(x) = 0.3347   f '(x) = – 0.02489   y = a.x + b
a = – 0.024894   b = 0.44625

On a trouvé $y=\dfrac{2}{e^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x}{2e^3}$ pour équation de T.

Il s'agit d'une équation de la forme $y=ax+b$ avec $a=-\dfrac{1}{2e^3}$ et $b=\dfrac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$ (valeurs exactes).

On calcule $-\dfrac{1}{2e^3}$ et $\dfrac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$ à l'aide de la calculatrice et l'on observe que les résultats sont en accord avec ceux fournis par l'équation de la tangente obtenue à l'écran.

$\boxed{8}$

$f : x \mapsto 3e^{\frac{2}{x}}$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (opérations sur les fonctions dérivables).

La méthode la plus habile pour dériver $3e^{\frac{2}{x}}$ est de reconnaître une forme kU avec $k=3$ et $U(x)=e^{\frac{2}{x}}$.

On utilise la formule $(kU)'=kU'$.

$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f'(x)=3\times\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)e^{\frac{2}{x}}$ (formule $\left(e^u\right)'=u'e^u$)

$=-\dfrac{6}{x^2}e^{\frac{2}{x}}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=-\dfrac{6e^{\frac{2}{x}}}{x^2}$

Pour dériver commodément f', on effectue la réécriture $f'(x)=-6\times\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{2}{x}}$.

On a donc une forme kU avec $k=-6$ et $U(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{2}{x}}$.

On dérive U par la formule d'un produit : $(uv)'=u'v+uv'$.

On utilise $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'=-\dfrac{2}{x^3}$.

Pour dériver $\dfrac{2}{x}$, on écrit $\dfrac{2}{x}=2\times\dfrac{1}{x}$.

$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f''(x)=-6\left[-\dfrac{2}{x^3}\times e^{\frac{2}{x}}+\dfrac{1}{x^2}\times\left(-\dfrac{2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}\right)\right]$

$=-6\left(-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}\right)e^{\frac{2}{x}}$

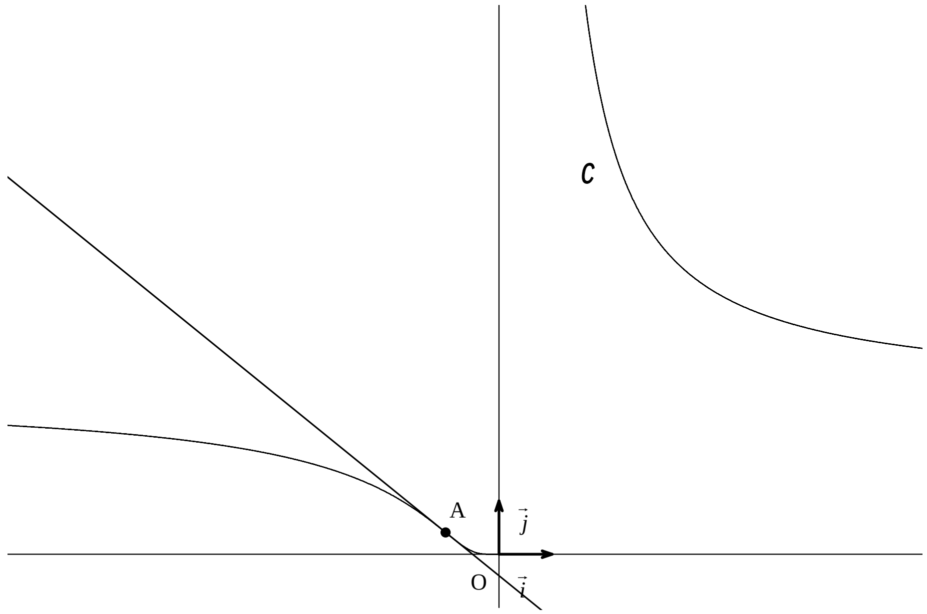
$=-6\times(-2)\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)e^{\frac{2}{x}}$

$=12\times\dfrac{x+1}{x^4}e^{\frac{2}{x}}$

$=\dfrac{12(x+1)e^{\frac{2}{x}}}{x^4}$

Le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $x+1$ (car une exponentielle est toujours strictement positif et x^4 est strictement positif pour tout réel x non nul).

f'' s'annule et change de signe en -1 (on peut le voir en faisant un petit tableau de signes) donc $\mathcal{C}$ admet le point $A\left(-1\,;3e^{-2}\right)$ pour point d'inflexion.



Le coefficient directeur de la tangente en A à $\mathcal{C}$ est $f'(-1)=-6e^{-2}=-\dfrac{6}{e^2}$.

La tangente en A à $\mathcal{C}$ a pour équation $y=\dfrac{3}{e^2}-\dfrac{6}{e^2}(x+1)$ soit $y=-\dfrac{6x+3}{e^2}$.

On vérifie sur la calculatrice en utilisant la commande pour tracer une tangente.

En bas de l'écran :

x = − 1 f (x) = 0.40601 f '(x) = − 0.812 y = a.x + b
a = − 0.81201 b = − 0.40601

On a trouvé $y=-\dfrac{6x+3}{e^2}$ pour équation de *T*.

Il s'agit d'une équation de la forme $y=ax+b$ avec $a=-\dfrac{6}{e^2}$ et $b=-\dfrac{3}{e^2}$ (valeurs exactes).

On calcule $-\dfrac{6}{e^2}$ et $-\dfrac{3}{e^2}$ à l'aide de la calculatrice et l'on observe que les résultats sont en accord avec ceux fournis par l'équation de la tangente obtenue à l'écran.

$-\dfrac{6}{e^2}=-0,812011699...$

$-\dfrac{3}{e^2}=-0,406005849...$

9

$f: x \mapsto e^{-x^2}$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=-2xe^{-x^2}$ (formule de dérivation $(e^u)'=u'e^u$)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x)=-2\left[1\times e^{-x^2}+x\times\left(-2xe^{-x^2}\right)\right]$

$=-2\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$

$=2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}$

Le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $2x^2-1$.

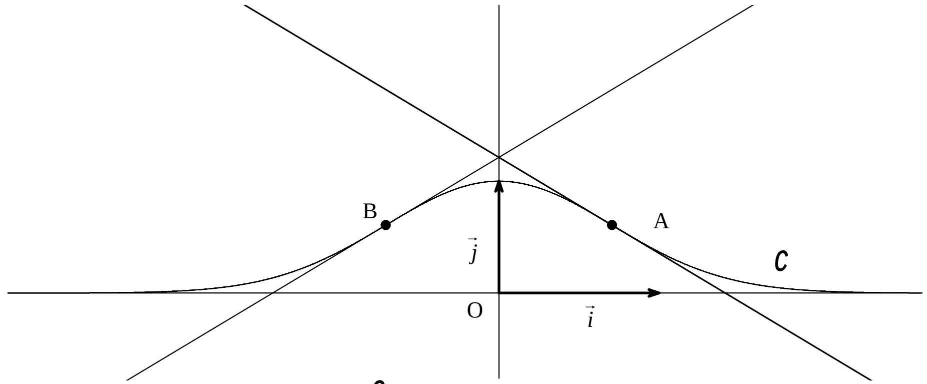
$2x^2-1$ est un polynôme du second degré dont les racines sont $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (par identité remarquable).

On applique ensuite directement la règle du signe d'un polynôme du second degré.

f'' s'annule et change de signe en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\mathcal{C}$ admet les points $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ et $B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ pour points d'inflexion.

Si le repère est orthogonal, les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ce qui est logique car la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie puisque *f* est paire.

On peut facilement dresser le tableau de variations de *f*.



Le coefficient directeur de la tangente en A à $\mathcal{C}$ est :

$f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=-\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{2}\times\dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=-\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{e}}=-\sqrt{\dfrac{2}{e}}$.

Le coefficient directeur de la tangente en B à $\mathcal{C}$ est $f'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\dfrac{2}{e}}$.

La tangente en A à $\mathcal{C}$ a pour équation $y=\dfrac{2-x\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$ (calculs à faire au brouillon).

La tangente en B à $\mathcal{C}$ a pour équation $y=\dfrac{2+x\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$.

$\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

$\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ (limite obtenue par changement de variable).

On vérifie sur la calculatrice en utilisant la commande pour tracer une tangente.

Pour la tangente en A :

En bas de l'écran :

x = 1/√(2) f (x) = 0.60653 f '(x) = − 0.8578 y = a.x + b
a = − 0.85776 b = 1.2131

On a trouvé $y=\dfrac{2-x\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$ pour équation de *T*. On peut aussi écrire cette équation sous la forme $y=\dfrac{2}{\sqrt{e}}-x\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$

Il s'agit d'une équation de la forme $y=ax+b$ avec $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$ et $b=\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ (valeurs exactes).

On calcule $-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$ et $\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ à l'aide de la calculatrice et l'on observe que les résultats sont en accord avec ceux fournis par l'équation de la tangente obtenue à l'écran.

10

$f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{\left(1+x^2\right) - 2x \times x}{\left(1+x^2\right)^2}$ (formule de dérivation d'un produit)

$= \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$

$= \left(1-x^2\right) \times \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$ (écriture à privilégier pour la dérivée seconde qui permet de dériver comme un produit)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = (-2x) \times \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2} + \left(1-x^2\right) \times \left(-\dfrac{2 \times 2x}{\left(1+x^2\right)^3}\right)$ [On utilise la formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$]

$= -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} - \dfrac{4x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$

$= -\dfrac{2x\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3} - \dfrac{4x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$

$= -\dfrac{2x\left(1+x^2\right) + 4x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$ (il n'y a pas de faute de signe : $-\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = -\left(\dfrac{a+b}{c}\right)$; la barre de fraction fait office de parenthèses)

$= -\dfrac{2x\left[1+x^2+2\left(1-x^2\right)\right]}{\left(1+x^2\right)^3}$

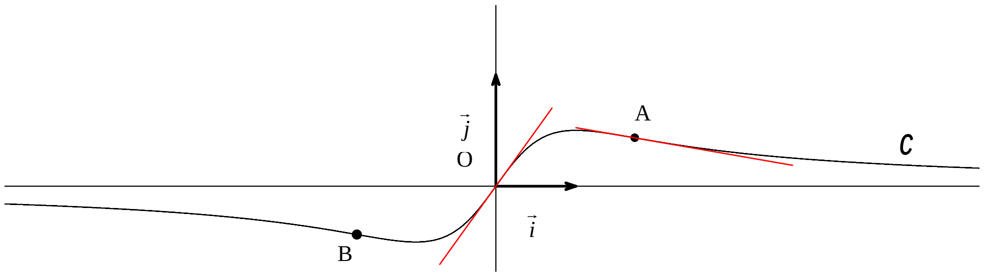
$= -\dfrac{2x\left(3-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$

$= \dfrac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$

Le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $x\left(x^2-3\right)$.

f'' s'annule et change de signe en 0, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ donc $\mathcal{C}$ admet les points O (origine du repère), A$\left(\sqrt{3} ; \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ et B$\left(-\sqrt{3} ; -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ pour points d'inflexion.

On peut facilement dresser le tableau de variations de f.
f présente un maximum local en $x=1$ et un minimum local en $x=-1$.
$\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses – 1 et 1.



Le coefficient directeur de la tangente en O à $\mathcal{C}$ est $f'(0)=1$.

Le coefficient directeur de la tangente en A à $\mathcal{C}$ est $f'\left(\sqrt{3}\right) = -\dfrac{1}{8}$.

Le coefficient directeur de la tangente en B à $\mathcal{C}$ est $f'\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{1}{8}$.

Les points A et B sont symétriques par rapport à O ce qui est logique car la courbe $\mathcal{C}$ admet le point O pour centre de symétrie puisque f est impaire.

$\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisse – 1 et 1.
Normalement, on devrait tracer ces tangentes sur le graphique.

$\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (limite obtenue par la règle du quotient simplifié des monômes de plus haut degré).

11

1°) $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > x+1$ (i)

Démontrons que $\forall x \in \left]-\infty ; 1\right[\quad e^x < \dfrac{1}{1-x}$ (ii).

Comme l'inégalité (i) est vraie pour tout réel x, on peut l'écrire en remplaçant x par $-x$.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > -x+1$ soit $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} > 1-x \quad (i')$.
On va supposer dans la suite que $x<1$.
Dans ce cas, $1-x>0$.

Par passage à l'inverse dans l'inégalité (i') (possible car les deux membres sont strictement positifs), on obtient

$\forall x \in \left]-\infty\,;1\right[\quad \dfrac{1}{e^{-x}} < \dfrac{1}{1-x}$ soit $\forall x \in \left]-\infty\,;1\right[\quad e^{x} < \dfrac{1}{1-x}$.

2°) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

On utilise l'inégalité (i) en remplaçant x par $\dfrac{1}{n}$ où n est un entier naturel non nul.

On obtient $e^{\frac{1}{n}} > 1+\dfrac{1}{n} \quad (1)$.

Les deux membres de (1) sont positifs ou nuls et n est un entier naturel donc positif ou nul.

On peut donc élever les deux membres de (1) à la puissance n.

On obtient $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ soit $e > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

3°) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

On utilise l'inégalité (ii) en remplaçant x par $\dfrac{1}{n+1}$ où n est un entier naturel non nul.

On obtient $e^{\frac{1}{n+1}} < \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}}$ soit $e^{\frac{1}{n+1}} < \dfrac{1}{\dfrac{n}{n+1}}$ ou encore $e^{\frac{1}{n+1}} < \dfrac{n+1}{n}$ ce qui donne finalement $e^{\frac{1}{n+1}} < 1+\dfrac{1}{n} \quad (2)$

Les deux membres de (2) sont positifs ou nuls et n est un entier naturel donc $n+1$ positif ou nul.

On peut donc élever les deux membres de (2) à la puissance $n+1$.

On obtient $\left(e^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ soit $e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

En rassemblant les inégalités des questions 2°) et 3°), on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

$\boxed{12}$

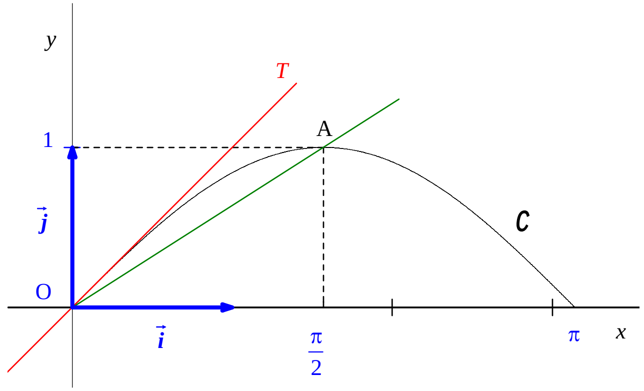
1°)

Pour tracer $\mathcal{C}$, on sait qu'elle passe par les points O (origine du repère), A et B de coordonnées $(\pi\,;0)$.

On peut placer éventuellement davantage de points (on sait par exemple, d'après le tableau des valeurs remarquables des cosinus, sinus et tangente, que $\sin\dfrac{\pi}{6} = \sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$).

$\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale en A.

Il n'est pas possible d'effectuer un construction géométrique à l'aide de la règle (non graduée) et du compas pour placer π de manière exacte.



$\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

$\mathcal{C}$ n'est ni un arc de parabole ni un arc de cercle !!! La forme est trompeuse.

$\mathcal{C}$ est un arc de sinusoïde.

2°) On calcule la dérivée première puis la dérivée seconde de f.

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

On étudie le signe $f''(x)$; en particulier, on cherche les valeurs d'annulation.

$\forall x \in I \quad f''(x) \leqslant 0$ donc f est concave sur I ce qui est bien en accord avec le graphique.

3°) On cherche une équation de la tangente T en O à $\mathcal{C}$.

Son coefficient directeur est donné par $f'(0) = \cos 0 = 1$.

T est donc la droite passant par O de coefficient directeur 1.

On en déduit que T a pour équation $y = x$.

Or f est concave sur I donc $\mathcal{C}$ est en dessous de ses tangentes sur I, en particulier de sa tangente en O.

On en déduit que $\forall x \in I \quad f(x) \leqslant x$ soit $\forall x \in I \quad \sin x \leqslant x$

4°) On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

Comme f est concave sur I, l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{OA}}$ de $\mathcal{C}$ est au-dessus du segment $[\mathrm{OA}]$.

La droite (OA) a pour coefficient directeur $m=\dfrac{y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{A}}}=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$.

Une équation de (OA) est donc $y=\dfrac{2}{\pi}x$.

On en déduit que $\forall x\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]\quad f(x)\geqslant\dfrac{2}{\pi}x$ soit $\forall x\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]\quad \sin x\geqslant\dfrac{2}{\pi}x$.

13

1°) On rappelle que pour tout réel x strictement supérieur à – 1, on a $\ln(1+x)\leqslant x$ (i).

Soit k un entier naturel non nul fixé.

Appliquons l'inégalité (i) à $\dfrac{1}{k}$ (on a $\dfrac{1}{k}>-1$).

On a donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\leqslant\dfrac{1}{k}$ d'où $\ln\dfrac{k+1}{k}\leqslant\dfrac{1}{k}$ ce qui donne finalement $\ln(k+1)-\ln k\leqslant\dfrac{1}{k}$.

2°) On écrit les inégalités obtenues en remplaçant successivement k par 1, 2, 3, … n.

$k=1\qquad \ln 2-\ln 1\leqslant 1$

$k=2\qquad \ln 3-\ln 2\leqslant\dfrac{1}{2}$

$k=3\qquad \ln 4-\ln 3\leqslant\dfrac{1}{3}$

$k=n\qquad \ln(n+1)-\ln n\leqslant\dfrac{1}{n}$

En ajoutant toutes les inégalités membre à membre, on obtient :

$\ln(n+1)-\ln 1\leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ (on a une somme télescopique à gauche) soit : $\ln(n+1)\leqslant S_n$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$ donc, par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.

14

On calcule la dérivée première puis la dérivée seconde de f.

$f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

On étudie le signe $f''(x)$; en particulier, on cherche les valeurs d'annulation.

f est convexe sur tout intervalle de la forme $[(2k+1)\pi\,;(2k+2)\pi]$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

f est concave sur tout intervalle de la forme $[2k\pi\,;(2k+1)\pi]$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$\mathcal{C}$ admet tous les points d'abscisses $k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ pour points d'inflexion.
Il y a donc une infinité de points d'inflexion.
Ces points sont tous des centres de symétrie de $\mathcal{C}$.
On visualise graphiquement facilement la convexité et les points d'inflexion.

$\boxed{13}$

Le 28 avril 2021

$\ln(1+x) \leqslant x$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1)$$

$$\ln n \leqslant \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n+1)$$

$$\frac{S_n}{\ln n}$$