T spécialité

Interrogation écrite du jeudi 14 janvier 2021

Durée : 30 minutes

Fiche autorisée

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………….…………………………………

Note : ….. / 20

I. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points)

On cherche à étudier le lien entre le surpoids et un syndrome S dans une population donnée. Parmi les personnes participant à l'étude, 40 % sont en surpoids. On observe que, parmi les individus en surpoids, 10 % souffrent du syndrome S, et que parmi les individus qui ne sont pas en surpoids, 5 % souffrent du syndrome S.
On choisit au hasard une personne ayant participé à l'étude.

1°) Calculer la probabilité que la personne choisie souffre du syndrome S.

….. (un seul résultat sans égalité, sous forme décimale)

2°) On choisit au hasard une personne qui souffre du syndrome S dans la population ayant participé à l'étude.
Quelle est la probabilité que cette personne soit en surpoids ?

….. (un seul résultat sans égalité, sous forme fractionnaire)

II. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{4-x^2}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ en détaillant bien.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

III. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^4}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)$ en détaillant bien.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

IV. (8 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points)

Soit ABCDEFGH un parallélépipède. On note I le centre de la face EFGH et J le milieu de $\left[\text{CI}\right]$.

Dans les questions 1°) et 2°), on se place dans le repère $\mathcal{R} = \left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1°) Quelles sont les coordonnées de G, I, J dans $\mathcal{R}$? Écrire les réponses directement sans expliquer.

…………………….   …………………….   …………………….

2°) Soit λ un réel quelconque. Dans chaque cas, donner les coordonnées du point M dans $\mathcal{R}$ en fonction de λ.

1[er] cas : $\overrightarrow{\text{AM}} = \lambda \overrightarrow{\text{AB}}$ ………………..

2[e] cas : $\overrightarrow{\text{EM}} = \lambda \overrightarrow{\text{EF}}$ ………………..

3[e] cas : $\overrightarrow{\text{AM}} = \lambda \overrightarrow{\text{AG}}$ ………………..

3°) On se place dans le repère $\mathcal{R}' = \left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{AH}}\right)$.

Quelles sont les coordonnées de G dans $\mathcal{R}'$? Justifier par une égalité vectorielle.

………..

………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 14-1-2021

I.

On cherche à étudier le lien entre le surpoids et un syndrome S dans une population donnée. Parmi les personnes participant à l'étude, 40 % sont en surpoids. On observe que, parmi les individus en surpoids, 10 % souffrent du syndrome S, et que parmi les individus qui ne sont pas en surpoids, 5 % souffrent du syndrome S.
On choisit au hasard une personne ayant participé à l'étude.

1°) Calculer la probabilité que la personne choisie souffre du syndrome S.

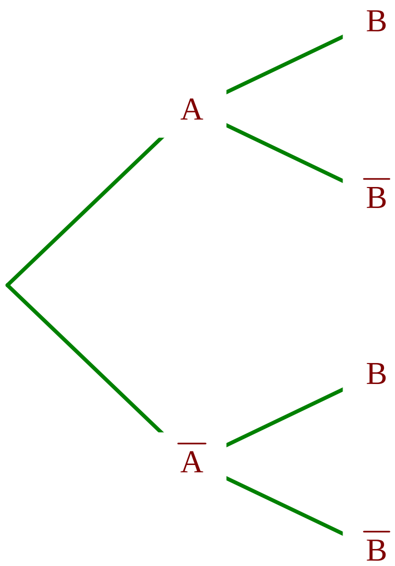
0,07 (un seul résultat sans égalité, sous forme décimale)

2°) On choisit au hasard une personne qui souffre du syndrome S dans la population ayant participé à l'étude.
Quelle est la probabilité que cette personne soit en surpoids ?

$\frac{4}{7}$ (un seul résultat sans égalité, sous forme fractionnaire)

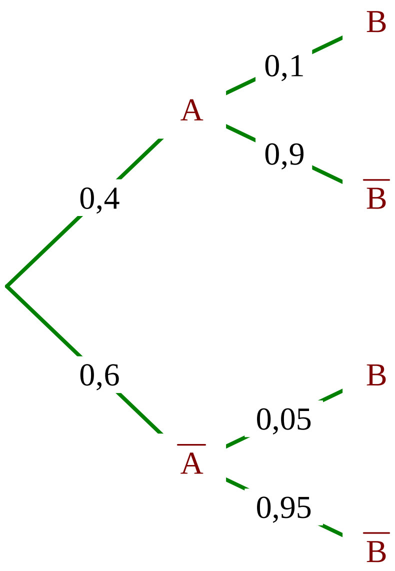
On dresse un arbre de probabilités avec les événements A : « L'individu est en surpoids » et B : « L'individu souffre du syndrome S ».

L'arbre est indispensable avant de commencer l'exercice.



On écrit les probabilités sur les branches sous forme décimale.
40 % donne une probabilité de 0,4 ; 10 % donne 0,1 ; 5 % donne 0,05.
On complète avec 0,6 / 0,9 / 0,95 (ces deux dernières probabilités ne serviront pas).

On adopte le modèle de l'équiprobabilité.



Calculer la probabilité que la personne choisie souffre du syndrome S revient à calculer $P(\mathrm{B})$.

On sait que A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$$

$$= P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B} / \mathrm{A}) + P(\overline{\mathrm{A}}) \times P(\mathrm{B} / \overline{\mathrm{A}}) \quad (\text{car } P(\mathrm{A}) \neq 0 \text{ et } P(\overline{\mathrm{A}}) \neq 0)$$

$$= 0,4 \times 0,1 + 0,6 \times 0,05$$

$$= 0,07$$

On calcule la probabilité d'une personne soit en surpoids sachant qu'elle souffre du syndrome S c'est-à-dire $P(\mathrm{A/B})$.

$$P(\mathrm{A/B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} \quad \text{(formule de définition d'une probabilité conditionnelle)}$$

$$= \frac{P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B/A})}{P(\mathrm{B})} \quad (\text{formule des probabilités composées } P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B/A}))$$

$$= \frac{0,4 \times 0,1}{0,07}$$

$$= \frac{4}{7}$$

On pourrait aussi directement utiliser la formule $P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B/A}) = P(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{A/B}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ ou la formule de Bayes.

On contrôle que l'on obtient bien un résultat compris entre 0 et 1 (on sait que le résultat d'une probabilité conditionnelle est un nombre compris entre 0 et 1).

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{4-x^2}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ en détaillant bien.

Il n'est pas forcément utile de donner l'ensemble de définition de la fonction.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} e^x = e^2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \left(4-x^2\right) = 0^- \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty.$$

On met un signe – en exposant sur le 0 car le signe de $4-x^2$ est strictement négatif au voisinage à droite de 2 (on peut éventuellement faire un tableau de signes).

On vérifie ce résultat graphiquement en traçant la courbe représentative de f sur la calculatrice.
On observe que celle-ci admet la droite d'équation $x = 2$ pour asymptote verticale.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^4}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en détaillant bien.

Il n'est pas forcément utile de donner l'ensemble de définition de la fonction.

Lorsque x tend vers + ∞, le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ tendent tous les deux vers + ∞.

On rencontre donc une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

f est une fonction rationnelle car c'est le quotient de deux fonctions polynômes.

On cherche le quotient des monômes de plus haut degré.
Il est inutile de développer complètement le dénominateur.

$$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} = 3$$

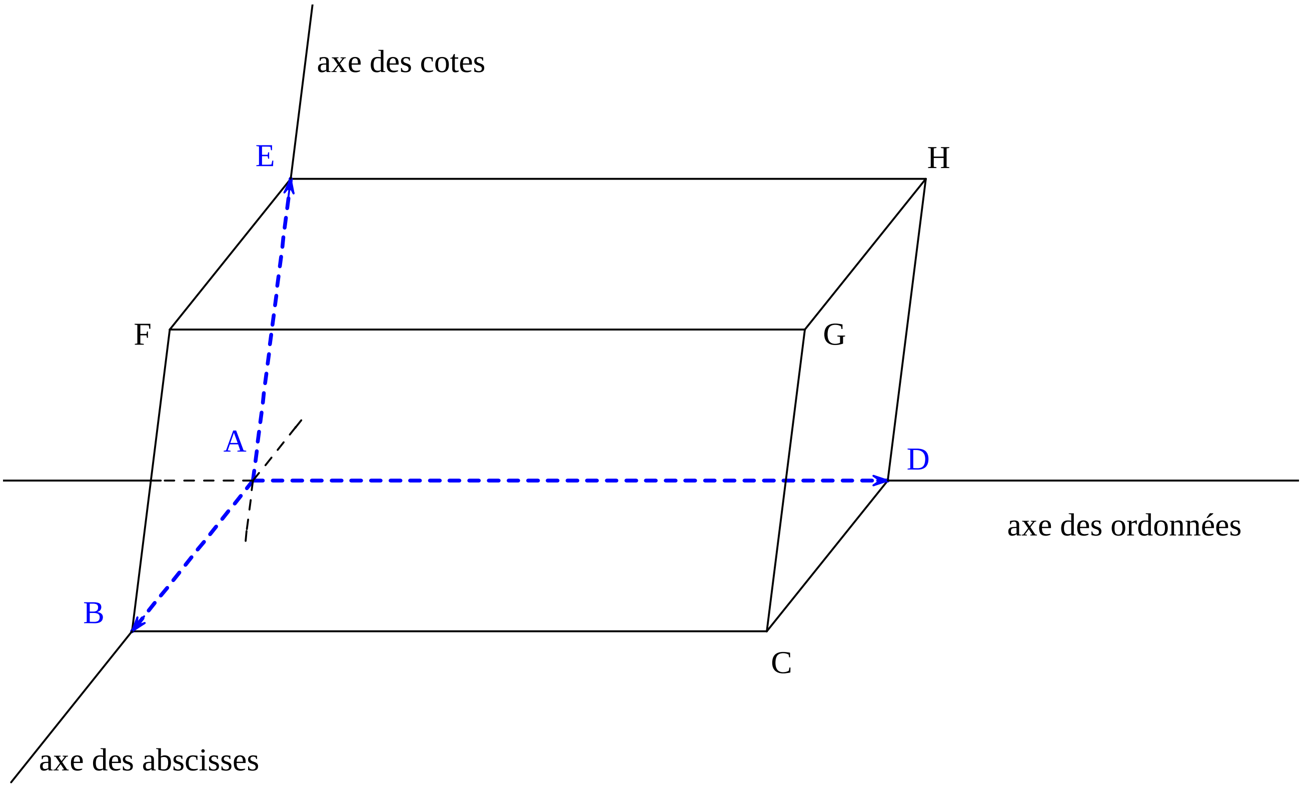
On vérifie ce résultat graphiquement en traçant la courbe représentative de f sur la calculatrice.
On observe que celle-ci admet la droite d'équation $y = 3$ pour asymptote horizontale au voisinage de + ∞.

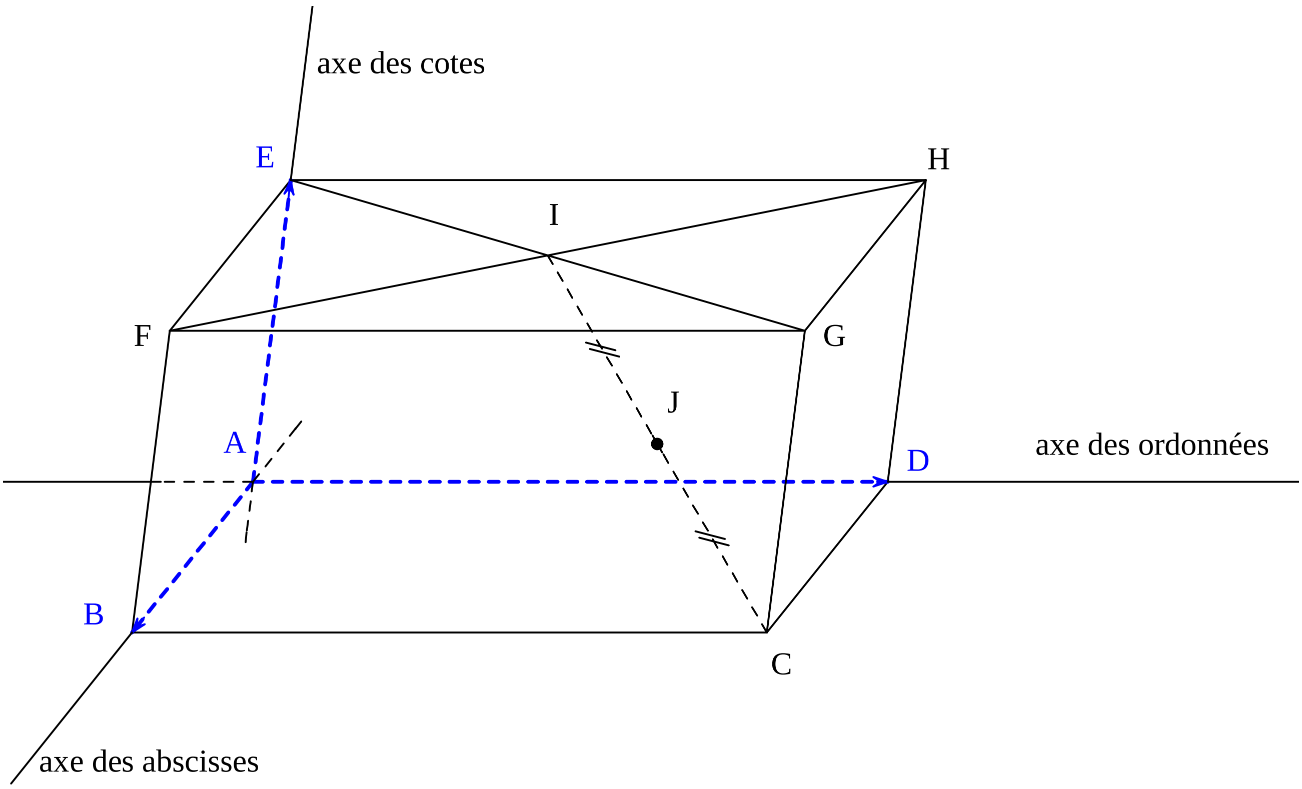
IV.

Soit ABCDEFGH un parallélépipède.
Dans les questions 1°) et 2°), on se place dans le repère $\boldsymbol{R} = \left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1°) Quelles sont les coordonnées de G, I, J dans $\boldsymbol{R}$? Écrire les réponses directement sans expliquer.

$G(1;1;1)$ $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$ $J\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$





Les coordonnées de G se justifient par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ (égalité du parallélépipède).
On retrouve très facilement ces coordonnées avec la figure.

Les coordonnées de I s'obtiennent très facilement en utilisant une égalité vectorielle ou en utilisant la formule des coordonnées d'un milieu.
On retrouve très facilement ces coordonnées avec la figure.

Les coordonnées de J s'obtiennent très facilement en utilisant la formule des coordonnées d'un milieu.
On peut retrouver ces coordonnées avec la figure mais c'est moins évident que pour G et I.

2°) Soit λ un réel quelconque. Dans chaque cas, donner les coordonnées du point M dans $\mathcal{R}$ en fonction de λ.

1er cas : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ $\qquad (\lambda\,;0\,;0)$

2e cas : $\overrightarrow{EM} = \lambda\overrightarrow{EF}$ $\qquad (\lambda\,;0\,;1)$

3e cas : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AG}$ $\qquad (\lambda\,;\lambda\,;\lambda)$

$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$ d'où M a pour coordonnées $(\lambda\,;0\,;0)$ dans $\mathcal{R}$.

$\overrightarrow{EM} = \lambda\overrightarrow{EF}$ donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AE} + \lambda\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \lambda\overrightarrow{AB}$ d'où M a pour coordonnées $(\lambda\,;0\,;1)$ dans $\mathcal{R}$.

$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AG}$ donc $\overrightarrow{AM} = \lambda\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) = \lambda\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AD} + \lambda\overrightarrow{AE}$ d'où M a pour coordonnées $(\lambda\,;\lambda\,;\lambda)$ dans $\mathcal{R}$.

On peut aussi travailler entièrement en coordonnées.

A est l'origine du repère $\mathcal{R}$ donc ses coordonnées sont $(0\,;0\,;0)$.
$B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$

1er cas :

L'égalité $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ se traduit en coordonnées par $\begin{cases} x_M = \lambda\times 1 \\ y_M = \lambda\times 0 \\ z_M = \lambda\times 0 \end{cases}$ (car le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1;0;0)$)

d'où $\begin{cases} x_M = \lambda \\ y_M = 0 \\ z_M = 0 \end{cases}$.

Les 2e cas et 3e cas se font de la même manière.

3°) On se place dans le repère $\mathcal{R}' = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}\right)$.
Quelles sont les coordonnées de G dans $\mathcal{R}'$? Justifier par une égalité vectorielle.

On sait que le quadrilatère ABGH est un parallélogramme donc on a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$ (égalité du parallélogramme).
Cette égalité vectorielle peut s'écrire $\overrightarrow{AG} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC} + 1\overrightarrow{AH}$.
On en déduit que G a pour coordonnées $(1\,;0\,;1)$ dans $\mathcal{R}'$.