Terminale experts

Interrogation écrite du mardi 12 janvier 2021

Durée : 30 minutes
- Fiche
- Calculatrice autorisée

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….……………………………….

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Compléter le tableau de congruences ci-dessous où x désigne un entier relatif.

Si $x \equiv \ldots \pmod{5}$	0	1	2	3	4
Alors $x^3 + x + 3 \equiv \ldots \pmod{5}$	…	…	…	…	…

2°) On note E l'ensemble des entiers relatifs x tels que $x^3 + x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$.
À l'aide du tableau de la question 1°), compléter l'équivalence suivante par une ou plusieurs congruences.

$$x \in E \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

II. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

On pose $\mathrm{N} = 2021^{2021}$.

1°) Démontrer que $5^3 \equiv -1 \pmod{9}$.
En déduire le reste de la division euclidienne de N par 9.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

2°) Déterminer le nombre de chiffres de l'écriture de N en base dix.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

III. (3 points : 1 point + 2 points)

Justifier que 5 admet un inverse modulo 9 et donner un inverse.

………..

………..

………..

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit x un entier relatif tel que $x \equiv -3 \pmod{7}$.

1°) Quel est le reste de la division euclidienne de x par 7 ?

…… (une seule réponse sans justifier)

2°) Quel est le reste de la division euclidienne de x^2 par 7 ?

…… (une seule réponse, justifier sur la ligne ci-dessous)

………..

V. (4 points)

Le plan P est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit M un point quelconque de P et M' son image par l'homothétie de centre $\Omega(1\,;-2)$ et de rapport 3.

On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.

Exprimer x' en fonction de x et y' en fonction de y.

On donnera la réponse sous la forme $\begin{cases} x' = ... \\ y' = ... \end{cases}$ dans l'espace ci-dessous.

Corrigé de l'interrogation écrite du 12-1-2021

I.

1°) Compléter le tableau de congruences ci-dessous où x désigne un entier relatif.

Si $x \equiv \ldots$ (mod. 5)	0	1	2	3	4
Alors $x^3 + x + 3 \equiv \ldots$ (mod. 5)	3	0	3	3	1

2°) On note E l'ensemble des entiers relatifs x tels que $x^3 + x + 3 \equiv 0$ (mod. 5).
À l'aide du tableau de la question 1°), compléter l'équivalence suivante par une ou plusieurs congruences.

$$x \in E \iff x \equiv 1 \pmod{5}$$

II.

On pose $\mathrm{N} = 2021^{2021}$.

1°) Démontrer que $5^3 \equiv -1$ (mod. 9).
En déduire le reste de la division euclidienne de N par 9.

On a $5^3 = 125$.

Or $125 - (-1) = 126$ et 126 est divisible par 9 donc $5^3 \equiv -1$ (mod. 9).

Pour déterminer le reste de la division euclidienne de N par 9, on va travailler en congruence modulo 9.

On sait qu'un entier naturel est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.
On peut donc écrire $2021 \equiv 5$ (mod. 9).

D'après la propriété des puissances d'exposant entier naturel pour les congruences, on a alors $\mathrm{N} \equiv 5^{2021}$ (mod. 9).

On s'intéresse donc à 5^{2021} modulo 9.

Il y a plusieurs possibilités pour avancer.

1$^{\text{ère}}$ possibilité :

On écrit $2021 = 673 \times 3 + 2$.

La relation $5^3 \equiv -1$ (mod. 9) entraîne $5^{3\times 673} \equiv (-1)^{673}$ (mod. 9) soit $5^{3\times 673} \equiv -1$ (mod. 9).

On peut ensuite multiplier les deux membres de cette relation de congruence par 5^2.

On obtient $5^{2021} \equiv -5^2$ (mod. 9) soit $5^{2021} \equiv -25$ (mod. 9).

Or $-25 \equiv 2$ (mod. 9).

La propriété de transitivité de la relation de congruence permet donc d'écrire $\text{N} \equiv 2 \pmod{9}$.

Comme $0 \leqslant 2 < 9$, on en déduit que le reste de la division euclidienne de N par 9 est égal à 2.

2^e^ possibilité :

La relation $5^3 \equiv -1 \pmod{9}$ entraîne $\left(5^3\right)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{9}$ soit $5^6 \equiv 1 \pmod{9}$.

Cette dernière relation fait apparaître une période de 6 pour les puissances de 5 modulo 9.

On écrit $2021 = 336 \times 6 + 5$.

On achève comme avec la 1^ère^ possibilité.

2°) Déterminer le nombre de chiffres de l'écriture de N en base dix.

On note p le nombre de chiffres de l'écriture de N en base dix.

$p = \text{E}(\log \text{N}) + 1$ (formule connue)

$= \text{E}\left(\log\left(2021^{2021}\right)\right) + 1$

$= \text{E}\left(2021 \log(2021)\right) + 1$

$= 6680 + 1$ (car d'après la calculatrice, $2021 \log(2021) = 6680{,}5495...$)

$= 6681$

Le nombre de chiffres de l'écriture de N en base dix est donc égal à 6681.

III.

Justifier que 5 admet un inverse modulo 9 et donner un inverse.

Les nombres 5 et 9 sont premiers entre eux car leur seul diviseur positif commun est 1.

2 est un inverse de 5 modulo 9 car $2 \times 5 \equiv 1 \pmod{9}$.

IV.

Soit x un entier relatif tel que $x \equiv -3 \pmod{7}$.

1°) Quel est le reste de la division euclidienne de x par 7 ?

4 (une seule réponse sans justifier)

2°) Quel est le reste de la division euclidienne de x^2 par 7 ?

2 (une seule réponse, justifier sur la ligne ci-dessous)

On élève au carré les deux membres de la relation $x \equiv -3 \pmod{7}$.

En élevant les deux membres au carré, on obtient $x^2 \equiv 9 \pmod{7}$.
Or $9 \equiv 2 \pmod{7}$.

On a donc $x^2 \equiv 2 \pmod{7}$.

Comme $0 \leqslant 2 < 7$, on en déduit que le reste de la division euclidienne de x^2 par 7 est 2.

V.

Le plan P est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit M un point quelconque de P et M' son image par l'homothétie de centre $\Omega(1\,;-2)$ et de rapport 3.

On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.

Exprimer x' en fonction de x et y' en fonction de y.

On donnera la réponse sous la forme $\begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}$ dans l'espace ci-dessous.

$$\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y + 4 \end{cases}$$

On utilise la formule matricielle : $\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'+2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}$.