T spécialité

Interrogation écrite du jeudi 7 janvier 2021

Durée : 30 minutes

Fiche autorisée

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………….……………………………….

Note : ….. / 20

I. (3 points)

On considère une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer soit égale à p, où p est un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;1]$. On pose $q=1-p$.

On lance 10 fois de suite cette pièce dans des conditions identiques indépendantes.
Exprimer en fonction de p et q la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le côté pile à l'issue des 10 lancers.

…………………………… (une seule réponse sans égalité)

II. (8 points : 1°) 2 points + 2 points ; 2°) 2 points + 2 points)

Une compagnie aérienne a mis en place pour une de ses lignes un système de surréservation afin d'abaisser les coûts.
Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 200 places et a vendu 202 réservations.
On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n=202$ et $p=0{,}971$.

1°) Calculer la probabilité :

● que tous les clients se présentent à l'embarquement ;

● que la compagnie se trouve en situation de surréservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).
On donnera chaque résultat sans égalité en arrondissant au millième.

……………… ………………

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X (une égalité pour chaque résultat en valeur exacte).

……………… ………………

III. (4 points = 1 point + 1 point ; 1 point + 1 point)

On considère un jeu dans lequel on dispose de deux dés cubiques non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance une fois les deux dés et on calcule la somme des numéros des faces supérieures.
On gagne si la somme des numéros est supérieure ou égale à 4.
Compléter la fonction Python jeu`()` au verso permettant de simuler une partie de ce jeu en renvoyant la valeur 1 si on gagne et 0 si on perd.
Compléter ensuite la fonction `repet(n)` qui simule n parties successives de ce jeu dans des conditions identiques indépendantes où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 et qui renvoie le nombre de parties gagnées.
On utilisera la fonction `jeu()` dans l'une des instructions de la fonction `repet(n)`.

```
from random import randint

def jeu():
    x,y=randint(1,6),randint(1,6)

    if ………………….:
       g=……
    else:
       g=……
    return g
```

```
def repet(n):
    r=…..
    for i in range(1,n+1):

       r=…………..
    return r
```

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Soit ABCDEFGH un cube. On note O le centre de la face BCGF.

1°) Écrire une formule de réduction du vecteur $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EG}$ en utilisant le point O.
Expliquer très brièvement.

………..

………..

2°) On pose $\vec{u}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EG}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EO}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.

………..

………..

………..

………..

3°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sans expliquer.

……………………………….. (une seule égalité)

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BO}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AH}$.

………………. (une seule égalité)

Bonus sur 1 point :
Exprimer la longueur EO en fonction de l'arête *a* du cube.

Corrigé de l'interrogation écrite du 7-1-2021

I.

On considère une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer soit égale à p, où p est un réel quelconque de l'intervalle $\left[0\,;1\right]$. On pose $q=1-p$.
On lance 10 fois de suite cette pièce dans des conditions identiques indépendantes.
Exprimer en fonction de p et q la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le côté pile à l'issue des 10 lancers.

$45p^2q^8$ (une seule réponse sans égalité)

On utilise la formule du cours.

On a $\binom{10}{2}=45$.

II.

Une compagnie aérienne a mis en place pour une de ses lignes un système de surréservation afin d'abaisser les coûts.
Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 200 places et a vendu 202 réservations.
On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n=202$ et $p=0{,}971$.

1°) Calculer la probabilité :

● que tous les clients se présentent à l'embarquement ;

● que la compagnie se trouve en situation de surréservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).
On donnera chaque résultat sans égalité en arrondissant au millième.

0,003 0,018

● La probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement est donnée par $P\left(\text{X}=202\right)=0{,}971^{202}$ (inutile de faire appel à la loi binomiale).

● La probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation est donnée par
$P\left(\text{X}>200\right)=P\left(\text{X}=201\right)+P\left(\text{X}=202\right)$.
On utilise la calculatrice.
On peut aussi écrire $P\left(\text{X}>200\right)=1-P\left(\text{X}\leqslant 200\right)$.

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X (une égalité pour chaque résultat en valeur exacte).

$E\left(\text{X}\right)=196{,}142$ $V\left(\text{X}\right)=5{,}688118$

III.

On considère un jeu dans lequel on dispose de deux dés cubiques non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance une fois les deux dés et on calcule la somme des numéros des faces supérieures.
On gagne si la somme des numéros est supérieure ou égale à 4.
Compléter la fonction Python jeu`()` au verso permettant de simuler une partie de ce jeu en renvoyant la valeur 1 si on gagne et 0 si on perd.
Compléter ensuite la fonction `repet(n)` qui simule n parties successives de ce jeu dans des conditions identiques indépendantes où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 et qui renvoie le nombre de parties gagnées.
On utilisera la fonction `jeu()` dans l'une des instructions de la fonction `repet(n)`.

```
from random import randint

def jeu():
    x,y=randint(1,6),randint(1,6)
    if x+y>=4:
       g=1
    else:
       g=0
    return g
```

```
def repet(n):
    r=0
    for i in range(1,n+1):
       r=r+jeu()
    return r
```

IV.

Soit ABCDEFGH un cube. On note O le centre de la face BCGF.

On commence par faire une figure soignée.

1°) Écrire une formule de réduction du vecteur $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EG}$ en utilisant le point O.
Expliquer très brièvement.

Par hypothèse, on sait que O est le centre de la face BCGF donc O est le milieu de $[BG]$.

D'après une propriété du cours, on a : $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EO}$.

On peut aussi utiliser la relation de Chasles : $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OG}=...$.

2°) On pose $\vec{u}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EG}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EO}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.

D'après la question précédente, $\vec{u}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{EO}$.
On en déduit que $\vec{u}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EO}$. Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EO}$ sont coplanaires.

3°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sans expliquer.

$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (une seule égalité)

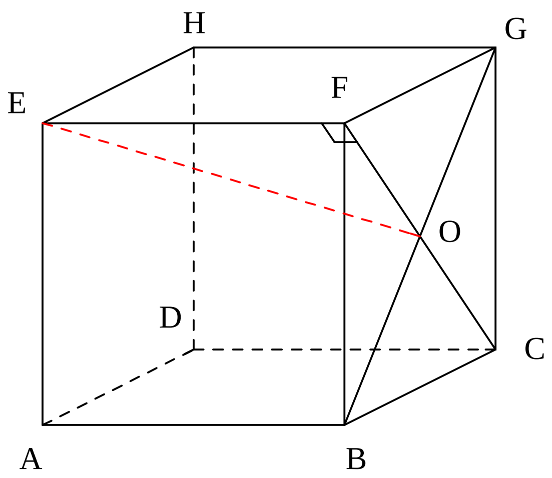
On a $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$.
Or $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (égalité du parallélogramme dans le carré ABCD).
On en déduit que $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BO}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AH}$.

$$\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \quad \text{(une seule égalité)}$$

Bonus sur 1 point :
Exprimer la longueur EO en fonction de l'arête *a* du cube.

1ère méthode : meilleure méthode



On se place dans le plan (CDE).

Le quadrilatère EFCD est un rectangle (propriété dans un cube).

On a $CF=a\sqrt{2}$ car BCGF est un carré (on applique la formule donnant la longueur des diagonales d'un carré en fonction de la longueur des côtés).

Comme O est centre de la face BCGF, O est le milieu du segment $[CF]$ et par suite, $OE=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

On applique ensuite le théorème de Pythagore dans le triangle OEF rectangle en F.

On a $OE^2=EF^2+OF^2=a^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=a^2+\frac{2a^2}{4}=a^2+\frac{a^2}{2}=\frac{3a^2}{2}$.

On en déduit que $EO=a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

2e méthode : méthode moins bonne

Le triangle EBG est isocèle en E car $EB=EG=a\sqrt{2}$.
Or O est le milieu de $[BG]$ donc O est aussi le pied de la hauteur issue de E dans ce triangle.

On a donc $EO^2=\left(a\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=2a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{3a^2}{2}$.

On en déduit que $EO=a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

3e méthode : méthode moins bonne

On utilise le milieu I de $[FG]$.

Le triangle EOI est rectangle en I (à démontrer).
On termine aisément avec cette méthode.