Terminale experts

Interrogation écrite du mardi 15 décembre 2020

Durée : 30 minutes
- Fiche
- Calculatrice autorisée

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………….……………………………….

Note : ….. / 20

Mois de naissance : …………………

I. (5 points : 1 point + 4 points)

● Pour tout couple $(a\,;b)$ d'entiers relatifs, on note $\mathscr{D}(a\,;b)$ l'ensemble des diviseurs positifs communs à *a* et *b*.

● On rappelle que le lemme d'Euclide appliqué à des entiers relatifs quelconques *a*, *b*, *c*, *d* vérifiant l'égalité $a = bc + d$ permet d'écrire $\mathscr{D}(a\,;b) = \mathscr{D}(b\,;d)$.

Pour tout entier relatif *n*, on note E_n l'ensemble des diviseurs positifs communs à $n+1$ et $n-1$.

À partir de l'égalité $n+1 = (n-1)\times 1 + 2$, démontrer que $E_n = \mathscr{D}(n-1\,;2)$. En déduire E_n suivant les valeurs de *n*.

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

II. (2 points)

Quel est le quotient et le reste de la division euclidienne de – 110 par 3 ?

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

III. (9 points : 1°) 1 point ; 2°) 6 points + 2 points)

Soit n un entier relatif tel que le reste de la division euclidienne de n par 8 est égal à 5.
On note q le quotient de cette division euclidienne.

1°) Écrire ci-contre une égalité vérifiée par n et q. ……………………………..

2°) Compléter le tableau ci-contre et justifier sur les lignes ci-dessous le résultat demandé suivant le mois de naissance.

① janvier à avril compris

② mai à août compris

③ septembre à décembre compris.

	Division euclidienne de	Quotient	Reste
①	n par 4	…………	……
②	$10n$ par 8	…………	……
③	$-6n$ par 8	…………	……

……

……

……

……

IV. (4 points)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on note A le point d'affixe $\mathrm{i}-1$.

Déterminer l'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que $|z+1-\mathrm{i}|=4$.

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé de l'interrogation écrite du 15-12-2020

I.

• Pour tout couple $(a\,;b)$ d'entiers relatifs, on note $\mathscr{D}(a\,;b)$ l'ensemble des diviseurs positifs communs à a et b.

• On rappelle que le lemme d'Euclide appliqué à des entiers relatifs quelconques a, b, c, d vérifiant l'égalité $a=bc+d$ permet d'écrire $\mathscr{D}(a\,;b)=\mathscr{D}(b\,;d)$.

Pour tout entier relatif n, on note E_n l'ensemble des diviseurs positifs communs à $n+1$ et $n-1$.

À partir de l'égalité $n+1=(n-1)\times1+2$, démontrer que $E_n=\mathscr{D}(n-1\,;2)$. En déduire E_n suivant les valeurs de n.

En appliquant le lemme d'Euclide avec les entiers relatifs $a=n+1$, $b=n-1$, $c=1$, $d=2$, on obtient immédiatement. On a $E_n=\mathscr{D}(n-1\,;2)$.

Or les diviseurs positifs de 2 sont 1 et 2.

On distingue deux cas suivant la parité de n.

1$^{\text{er}}$ cas : n est pair

Dans ce cas, $n-1$ est impair. On a alors $E_n=\{1\}$.

2$^{\text{e}}$ cas : n est impair

Dans ce cas, $n-1$ est pair. On a alors $E_n=\{1\,;2\}$.

II.

Quel est le quotient et le reste de la division euclidienne de – 110 par 3 ?

On a $-110=-37\times3+1$.

– 37 est un entier relatif et 1 est un entier naturel strictement inférieur à 3.

On en déduit que l'on vient d'écrire une égalité de division euclidienne.

Dans la division euclidienne de – 110 par 3, le couple $(\text{quotient}\,;\text{reste})$ est $(-37\,;1)$.

III.

Soit n un entier relatif tel que le reste de la division euclidienne de n par 8 est égal à 5.
On note q le quotient de cette division euclidienne.

1°) Écrire ci-contre une égalité vérifiée par n et q. $n=8q+5$

2°) Compléter le tableau ci-contre et justifier sur les lignes ci-dessous le résultat demandé suivant le mois de naissance.

① janvier à avril compris

② mai à août compris

③ septembre à décembre compris.

	Division euclidienne de	Quotient	Reste
①	n par 4	$2q+1$	1
②	$10n$ par 8	$10q+6$	2
③	$-6n$ par 8	$-6q-4$	2

On utilise l'égalité $n=8q+5 \quad (1)$.

①

(1) s'écrit aussi $n=4\times 2q+5 \quad (1')$.

Toutefois on ne peut pas en déduire que le reste de la division euclidienne de n par 4 est 5 puisque $5 \geqslant 4$.

Mais $5=4+1$.

$(1')$ permet d'écrire $n=4\times 2q+4+1=4\times(2q+1)+1 \quad (1'')$.

Cette fois, on obtient bien l'égalité traduisant la division euclidienne de n par 4 : le reste est 1 puisque $1<4$ et le quotient est $2q+1$ qui est bien un entier puisque q l'est.

Dans la division euclidienne de n par 4, le couple $(\text{quotient} ; \text{reste})$ est $(2q+1 ; 1)$.

②

On reprend l'égalité (1). On multiplie les deux membres par10.

On a donc $10n=80q+50$.

Il ne s'agit pas d'une égalité de division euclidienne puisque 50 est un entier strictement supérieur à 8.

On décompose 50 en écrivant sa division euclidienne par 8.

$$10n=80q+8\times 6+2$$

$$=8\times(10q+6)+2$$

$10q+6$ est un entier relatif.

On a donc bien écrit une égalité de division euclidienne.

Dans la division euclidienne de $10n$ par 8, le couple $(\text{quotient} ; \text{reste})$ est $(10q+6 ; 2)$.

③

On reprend l'égalité (1). On multiplie les deux membres par – 6.

On a donc $-6n=-48q-30$.

Il ne s'agit pas d'une égalité de division euclidienne puisque – 30 est un entier strictement négatif.

On décompose – 30 en écrivant sa division euclidienne par 8.

$$-6n=-48q-4\times 8+2$$

$$=8\times(-6q-4)+2$$

$-6q-4$ est un entier relatif.

On a donc bien écrit une égalité de division euclidienne.

Dans la division euclidienne de – 6n par 8, le couple (quotient ; reste) est $(-6q-4\,;2)$.

IV.

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on note A le point d'affixe $\mathrm{i}-1$.
Déterminer l'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que $|z+1-\mathrm{i}|=4$.

Soit M un point quelconque du plan P, d'affixe z.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\in E &\Leftrightarrow |z-(\mathrm{i}-1)|=4 \\ &\Leftrightarrow |z-z_{\mathrm{A}}|=4 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{AM}=4 \end{aligned}$$

L'ensemble E est le cercle de centre A et de rayon 4.