T experts

Devoir pour le mercredi 16 décembre 2020

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….. **Note : ….. / 20**

I. À tout nombre complexe z on associe la matrice $\mathrm{A}(z)=\begin{pmatrix} z & \mathrm{i}-1 \\ \mathrm{i}+1 & \overline{z} \end{pmatrix}$.

On note P le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\det \mathrm{A}(z)=9$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. On considère pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la matrice carrée A_n d'ordre n définie par

$$\mathrm{A}_n=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1°) Dans cette question, on s'intéresse aux matrices $\mathrm{A}_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifier que ces matrices sont inversibles et écrire leurs inverses. On pourra utiliser la calculatrice ou le site dcode pour les matrices A_3 et A_4.

2°) À l'aide de la question précédente et en considérant éventuellement d'autres valeurs de n, conjecturer que A_n est inversible pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et écrire son inverse.

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note B_n la transposée de A_n. Autrement dit $\mathrm{B}_n = {}^t\mathrm{A}_n$.

Calculer le produit $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ et conclure par rapport à la conjecture émise dans la question précédente.

Corrigé du devoir pour le 16-12-2020

I. À tout nombre complexe z on associe la matrice $\mathrm{A}(z)=\begin{pmatrix} z & \mathrm{i}-1 \\ \mathrm{i}+1 & \overline{z} \end{pmatrix}$.

On note P le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\det \mathrm{A}(z)=9$.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \det \mathrm{A}(z)=z\overline{z}-(\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}-1)$$

$$=|z|^2-(-1-1)$$

$$=|z|^2-(-2)$$

$$=|z|^2+2$$

Soit M un point quelconque de P, d'affixe z.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow \det \mathrm{A}(z)=9 \\ &\Leftrightarrow |z|^2+2=9 \\ &\Leftrightarrow |z|^2=7 \\ &\Leftrightarrow |z|=\sqrt{7} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{OM}=\sqrt{7} \end{aligned}$$

E est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{7}$.

II. On considère pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la matrice carrée A_n d'ordre n définie par

$$\mathrm{A}_n=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est possible de définir la matrice A_n avec des formules donnant les coefficients.

1°) Dans cette question, on s'intéresse aux matrices $\mathrm{A}_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifier que ces matrices sont inversibles et écrire leurs inverses. On pourra utiliser la calculatrice ou le site dcode pour les matrices A_3 et A_4.

$\det \mathrm{A}_2=-1$ donc A_2 est inversible et $\mathrm{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On constate que $\mathrm{A}_2^{-1}=\mathrm{A}_2$.

$\mathrm{A}_3^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{A}_4^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Dans le cours, on a défini le déterminant d'une matrice carrée uniquement dans le cas d'une matrice carrée d'ordre 2.
La définition du déterminant d'une matrice carrée d'ordre strictement supérieur à 2 n'a pas été donnée car plus compliquée. On ne parle donc pas ici du déterminant des matrices A_3 et A_4, même si la calculatrice permet d'obtenir leurs valeurs.

2°) À l'aide de la question précédente et en considérant éventuellement d'autres valeurs de n, conjecturer que A_n est inversible pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et écrire son inverse.

À l'aide des questions précédentes, on peut conjecturer que A_n est inversible pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et que

$$\mathrm{A}_n^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note B_n la transposée de A_n. Autrement dit $\mathrm{B}_n={}^t\mathrm{A}_n$.
Calculer le produit $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ et conclure par rapport à la conjecture émise dans la question précédente.

On a $\mathrm{B}_n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (obtenue par définition de la transposée d'une matrice).

On calcule ensuite le produit $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$.

$$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n=\mathrm{I}_n$ donc on peut affirmer que A_n est inversible et que $\mathrm{A}_n^{-1}=\mathrm{B}_n$.