T1 et T4 spécialité

Interrogation écrite du jeudi 10 décembre 2020

Durée : 30 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………….……………………………….

Note : ….. / 20

I. (3 points : 2 points + 1 point)

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{2 - u_n}$ et $w_n = \sqrt{u_n + 2}$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ en détaillant la démarche (présentation avec accolades) puis $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$ sans détailler.

…..……………………………

……………………………………………………………………………………

…..……………………………

………………………………

II. (3 points)

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} 2^{3k-1}$. Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n.

…..…………………………………………………………………………………………………

…..…………………………………………………………………………………………………

…..…………………………………………………………………………………………………

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel strictement positif fixé et la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$ pour tout entier naturel n.

On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de n et pour la question 3°), on admettra que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

1°) Déterminer a tel que $u_1 = 2$.

…………… (une seule égalité)

2°) On considère la fonction `liste_termes(a,n)` qui prend pour arguments un réel a strictement positif et un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui renvoie la liste de tous les termes dont l'indice est inférieur ou égal à n.
Compléter les instructions manquantes dans l'encadré de gauche.
3°) On considère la fonction Python `seuil(a,e)` qui prend pour arguments un réel a strictement positif et un réel e strictement positif et qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant e$.
Compléter les instructions manquantes dans l'encadré de droite.

```
from math import log

def liste_termes(a,n):
    u=a
    L=[u]
    for i in range(n+1):

        .................

        .................
    return L
```

```
from math import log

def seuil(a,e):
    u=a
    n=0
    while ................:

        .................

        .................
    return n
```

IV. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 4 points ; 3°) 2 points)

Soit ABCDEFGH un cube.
1°) Quel est le plan médiateur du segment $[\text{FH}]$?

……… (une seule réponse sans justifier)

2°) Soit M et N deux points quelconques appartenant respectivement aux droites (AE) et (CG).
Les droites (MN) et (FH) sont-elles orthogonales ? Justifier.

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

3°) Quel est le projeté orthogonal de M sur la droite (GH) ?

……… (une seule réponse sans justifier)

Bonus : On note a l'arête du cube ($a \in \mathbb{R}_+^*$). Calculer la distance de H à la droite (AC) en fonction de a.

…………………………………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 10-12-2020

I.

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{2 - u_n}$ et $w_n = \sqrt{u_n + 2}$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ en détaillant la démarche (présentation avec accolades) puis $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$ sans détailler.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (2 - u_n) = 0^- \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty.$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 - u_n < 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 2$ (on obtient facilement ce résultat)

II.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} 2^{3k-1}$. Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

On transforme $2^{3k-1} = 2^{3k} \times 2^{-1} = \left(2^3\right)^k \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \times 8^k$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2^{3k-1}$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(2^{3k} \times 2^{-1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2} \times 2^{3k}\right)$$

$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=n} 8^k$ (la constante $\frac{1}{2}$ ne dépend pas de *k*, on peut la sortir devant la somme ; il s'agit en fait d'une factorisation)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{8^{n+1}-1}{8-1}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{8^{n+1}-1}{7}$$

$$= \frac{8^{n+1}-1}{14}$$

On peut facilement tester la formule obtenue pour $n = 0$.

D'une part, on a $\frac{8^{0+1}-1}{14} = \frac{8-1}{14} = \frac{1}{2}$.

D'autre part, on a $S_0 = \sum_{k=0}^{k=0} 2^{3k-1} = 2^{3\times 0-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

On obtient bien le même résultat.

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où *a* est un réel strictement positif fixé et la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$ pour tout entier naturel *n*.
On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de *n* et pour la question 3°), on admettra que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

1°) Déterminer *a* tel que $u_1 = 2$.

$$a = \mathrm{e}^2 - 1 \quad \text{(une seule égalité)}$$

On cherche $a > 0$ tel que $u_1 = 2$ c'est-à-dire $\ln(a+1) = 2 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow a+1=\mathrm{e}^2$

$\Leftrightarrow a=\mathrm{e}^2-1$

On a $\mathrm{e}^2-1>0$ donc cette valeur peut être retenue.

2°) On considère la fonction `liste_termes(a,n)` qui prend pour arguments un réel a strictement positif et un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui renvoie la liste de tous les termes dont l'indice est inférieur ou égal à n.
Compléter les instructions manquantes dans l'encadré de gauche.

3°) On considère la fonction Python `seuil(a,e)` qui prend pour arguments un réel a strictement positif et un réel e strictement positif et qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant e$.
Compléter les instructions manquantes dans l'encadré de droite.

```
from math import log

def liste_termes(a,n):
    u=a
    L=[u]
    for i in range(n+1):
        u=log(1+u)
        L.append(u)
    return L
```

```
from math import log

def seuil(a,e):
    u=a
    n=0
    while u>e:
          u=log(1+u)
          n=n+1
    return n
```

Attention à l'ordre dans les instructions.

IV.

Soit ABCDEFGH un cube.
1°) Quel est le plan médiateur du segment $[\mathrm{FH}]$?

(ACG) (une seule réponse sans justifier)

Il s'agit du plan contenant les points A, C, G, E.
Un plan est désigné par trois points non alignés donc on peut donner la réponse sous la forme (ACG), (AEC), (AEG), (CGE) etc…
2°) Soit M et N deux points quelconques appartenant respectivement aux droites (AE) et (CG).
Les droites (MN) et (FH) sont-elles orthogonales ? Justifier.

Le plan médiateur de $[\mathrm{FH}]$ est (ACG) donc, par définition d'un plan médiateur, la droite (FH) est orthogonale au plan (ACG).

$\mathrm{M} \in (\mathrm{AE})$ et $(\mathrm{AE}) \subset (\mathrm{ACG})$ donc $\mathrm{M} \in (\mathrm{ACG})$.
$\mathrm{N} \in (\mathrm{CG})$ et $(\mathrm{CG}) \subset (\mathrm{ACG})$ donc $\mathrm{N} \in (\mathrm{ACG})$.

On a donc $(\mathrm{MN}) \subset (\mathrm{ACG})$.

Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle orthogonale à toutes les droites de ce plan.

On en déduit que (FH) est orthogonale à (MN).

Complément : Lorsque M et N sont symétriques par rapport au point I, centre de la face EFGH, on peut démontrer que les droites (MN) et (FH) sont sécantes en I.
Dans ce cas, elles sont donc perpendiculaires.

3°) Quel est le projeté orthogonal de M sur la droite (GH) ?

H (une seule réponse sans justifier)

Le plan passant par M orthogonal à la droite (GH) est le plan (ADH).

Le point H est le point d'intersection de la droite (GH) et du plan (ADH).

C'est donc le projeté orthogonal de M sur (GH).

Bonus : On note a l'arête du cube ($a \in \mathbb{R}_+^*$). Calculer la distance de H à la droite (AC) en fonction de a.

$$d\left(\mathrm{H},(\mathrm{AC})\right)=a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

On sait que, par définition, la distance de H à la droite (AC) est la distance de H à son projeté orthogonal sur (AC).
On va donc chercher le projeté orthogonal de H sur (AC).

On fait une figure.

Le triangle ACH est équilatéral car tous les côtés ont pour longueur $a\sqrt{2}$.

Le projeté orthogonal de H sur (AC) est donc le milieu O de $[\mathrm{AC}]$ c'est-à-dire le centre de la face ABCD.

La distance de H à la droite (AC) est donc la longueur OH ce qu'on peut écrire $d\left(\mathrm{H},(\mathrm{AC})\right)=\mathrm{OH}$.

Il faut donc calculer OH.

Or on sait que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté x est $\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ (résultat à connaître par cœur qui se retrouve aisément grâce au théorème de Pythagore) donc $\mathrm{OH}=\dfrac{a\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}$ soit $\mathrm{OH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.