T1 et 4 spécialité

Interrogation écrite du mardi 1er décembre 2020

Durée : 45 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………….………………………………

Note : ….. / 20

I. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère l'équation différentielle $y'-4y=0$ (E).

1°) Résoudre l'équation (E). Mettre toute la rédaction en écrivant une idée par ligne.

………..

………..

………..

………..

2°) Donner sans explication l'expression de la solution f de (E) qui prend la valeur 3 en – 1.

………..

II. (2 points)

On considère la fonction Python `pos(L)` donnée dans le cadre ci-dessous qui prend pour argument une liste L de réels et qui renvoie la liste M.

```
def pos(L):
    M=[x for x in L if x>=0]
    return M
```

Quel est le rôle de cette fonction ? Répondre par une phrase correctement rédigée.

………..

………..

………..

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….…………………………………

III. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n - 1$ pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n* (expression sans dénominateur).

……..

……..

……..

……..

……..

IV. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Compléter l'instruction manquante de la fonction Python `terme(n)` écrite dans le cadre ci-dessous qui prend pour argument un entier naturel *n* supérieur à 1 et qui renvoie la valeur de u_n.

```
def terme(n):
    u=1
    for i in range(2,n+1):
        u=………
    return u
```

V. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 - \left(-\frac{2}{7}\right)^n$ pour tout entier naturel *n*.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ en justifiant soigneusement.

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………………………………………

……..

……..

……..

……..

VI. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes sont strictement positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n}$.

……..

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{(u_n)^2}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

……..

……..

……..

VII. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = {u_n}^2 - 1$.
On admet que la suite (u_n) n'est pas majorée.
Compléter les instructions manquantes de la fonction Python `seuil(M)` écrite dans le cadre ci-contre qui prend pour argument un réel M et qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant \mathrm{M}$.

```
def seuil(M):
    u=3
    n=0
    while ................ :
        u=u**2-1
        n=......
    return n
```

Corrigé de l'interrogation écrite du 1-12-2020

I.

On considère l'équation différentielle $y'-4y=0 \quad (\mathrm{E})$.

1°) Résoudre l'équation (E). Mettre toute la rédaction en écrivant une idée par ligne.

(E) s'écrit $y'=4y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=4$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{4x} \quad (k\in\mathbb{R})$.

2°) Donner sans explication l'expression de la solution *f* de (E) qui prend la valeur 3 en – 1.

On cherche *k* tel que $f(-1)=3 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow k\times\mathrm{e}^{-4}=3$

$\Leftrightarrow k=3\mathrm{e}^{4}$

La solution cherchée est la fonction *f* définie par $f(x)=3\mathrm{e}^{4x+4}$.

II.

On considère la fonction Python `pos(L)` donnée dans le cadre ci-dessous qui prend pour argument une liste L de réels et qui renvoie la liste M.

```
def pos(L):
    M=[x for x in L if x>=0]
    return M
```

Quel est le rôle de cette fonction ? Répondre par une phrase correctement rédigée.

La fonction `pos` renvoie la liste des éléments de L qui sont positifs ou nuls.

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=2^n-1$ pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n* (expression sans dénominateur).

Il s'agit de simplifier la somme des termes consécutifs de la suite (u_n).

Le recours au symbole Σ est intéressant.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(2^k - 1\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{k=n} 2^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{k=n} 1\right)$$ (propriété de séparation en deux sommes)

$$= \frac{2^{n+1}-1}{2-1} - (n+1)$$ (formule de la somme des puissances entières consécutives d'un réel $q \neq 1$: $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$)

$$= \frac{2^{n+1}-1}{1} - n - 1$$

$$= 2^{n+1} - 1 - n - 1$$

$$= 2^{n+1} - n - 2$$

On peut tester la formule obtenue pour $n = 0$.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Compléter l'instruction manquante de la fonction Python `terme(n)` écrite dans le cadre ci-dessous qui prend pour argument un entier naturel n supérieur à 1 et qui renvoie la valeur de u_n.

```
def terme(n):
    u=1
    for i in range(2,n+1):
        u=u+1/i
    return u
```

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 - \left(-\frac{2}{7}\right)^n$ pour tout entier naturel *n*.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ en justifiant soigneusement.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{2}{7}\right)^n = 0$ car $-1 < -\frac{2}{7} < 1$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

VI.

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes sont strictement positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$ (propriété sur les limites de suites : quand on divise 1 par un nombre positif très proche de 0, on obtient un nombre positif très grand)

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{(u_n)^2}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(u_n)^2} = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc on rencontre une forme indéterminée du type « } \infty - \infty \text{ ».}$$

On effectue une réécriture en mettant l'expression de v_n au même dénominateur.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_n - 1}{(u_n)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - 1) = -1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)^2 = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc, par limite d'un quotient, } \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty.$$

VII.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n{}^2 - 1$.
On admet que la suite (u_n) n'est pas majorée.
Compléter les instructions manquantes de la fonction Python `seuil(M)` écrite dans le cadre ci-contre qui prend pour argument un réel M et qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant \mathrm{M}$.

```
def seuil(M):

    u=3

    n=0

    while u<M:

          u=u**2-1

          n=n+1

    return n
```