

Corrigé du devoir pour le 7-12-2020

1°)

L'univers des possibles est $\Omega = \llbracket 1; 10 \rrbracket^2$.

On note P la loi de probabilité uniforme sur Ω .

Il y a 63 éléments de Ω formés d'entiers premiers entre eux et donc 37 éléments de Ω formés d'entiers non premiers entre eux.

On peut éventuellement utiliser une fonction Python pour éviter de faire un décompte à la main.

On utilise pour cela la fonction $\text{gcd}(a, b)$ qui donne le PGCD de deux entiers naturels a et b .

X peut prendre les valeurs $x_1 = a$ et $x_2 = -b$.

La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

On écrit les probabilités sous forme décimale (plus simple que d'avoir des fractions de dénominateur 100).

x_i	a	$-b$	
$P(X = x_i)$	0,63	0,37	Total = 1

2°)

$$E(X) = 0,63a - 0,37b$$

L'espérance mathématique de X est égale à $0,63a - 0,37b$.

3°)

Le jeu est équitable lorsque son espérance est nulle.

On cherche donc deux entiers naturels a et b tels que $0,63a - 0,37b = 0$ (ou encore $63a - 37b = 0$).

On peut prendre $a = 37$ et $b = 63$.

4°)

Avec $a = 4$ et $b = 5$, $E(X) = 0,67$.

On peut calculer la variance en utilisant la formule de définition ou la formule de König-Huygens.

$$\begin{aligned} V(X) &= (4 - 0,67)^2 \times 0,63 + (-5 - 0,67)^2 \times 0,37 \\ &= 18,8811 \end{aligned}$$

La variance de X est égale à 18,8811.