T spécialité

Devoir pour le mercredi 2 décembre 2020

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………..…………………………. **Note : ….. / 20**

I. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{k=n} (n+k)$.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5. On ne détaillera les calculs uniquement pour u_1, u_2, u_3.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

2°) Écrire une fonction Python qui prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui renvoie la valeur de u_n.
Vérifier les valeurs de la question précédente.

3°) Exprimer u_n en fonction de n à l'aide de factorielles.

……………………………….. (une seule expression)

II. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k$. Exprimer S_n en fonction de n.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

Corrigé du devoir pour le 2-12-2020

I. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{k=n} (n+k)$.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5. On ne détaillera les calculs uniquement pour u_1, u_2, u_3.

$$\begin{aligned} u_1 &= 1+1 \\ &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_2 &= (2+1)(2+2) \\ &= 3\times 4 \\ &= 12 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_3 &= (3+1)\times(3+2)\times(3+3) \\ &= 4\times 5\times 6 \\ &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_4 &= (4+1)\times(4+2)\times(4+3)\times(4+4) \\ &= 5\times 6\times 7\times 8 \\ &= 1680 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_5 &= (5+1)\times(5+2)\times(5+3)\times(4+4) \\ &= 6\times 7\times 8\times 9\times 10 \\ &= 30240 \end{aligned}$$

2°) Écrire une fonction Python qui prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui renvoie la valeur de u_n.
Vérifier les valeurs de la question précédente.

On utilise la formule de définition de u_n comme produit.

```
def prod(n):
    p=1
    for i in range(1,n+1):
        p=p*(n+i)
    return p
```

3°) Exprimer u_n en fonction de n à l'aide de factorielles.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{(2n)!}{n!} \quad \text{(une seule expression)}$$

II. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k$. Exprimer S_n en fonction de n.

On peut écrire $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left((-1)^k k\right)$.

On commence par calculer S_n pour de petites valeurs de n afin de mieux comprendre ce qui se passe.

n	0	1	2	3	4	5	6
S_n	0	-1	1	-2	2	-3	3

On observe aisément qu'on peut facilement grouper les termes par deux (on parle de sommation par groupes ou par paquets).

C'est cette méthode que l'on va mettre en œuvre dans la démonstration du cas général.
On distingue deux cas selon que n est pair ou impair.

1er cas : n est pair

On pose $n = 2p$ avec p entier naturel.

$$S_{2p} = 0\underbrace{-1+2}_{+1}\underbrace{-3+4}_{+1}\underbrace{-5+6}_{+1}+\ldots\underbrace{-(2p-1)+2p}_{+1}$$

On obtient une somme de termes tous égaux à 1.
Le nombre de termes est égal à p.

On en déduit que $S_{2p} = p$.

Remarque : On a raisonné dans le cas où n est supérieur ou égal à 2.
La formule reste valable lorsque n est égal à 0.

2e cas : n est impair

On pose $n = 2p+1$ avec p entier naturel.

$$S_{2p+1} = \underbrace{0-1}_{-1}+\underbrace{2-3}_{-1}+\underbrace{4-5}_{-1}+\underbrace{6-7}_{-1}+\ldots+\underbrace{(2p)-(2p+1)}_{-1}$$

On obtient une somme de termes tous égaux à – 1.
Le nombre de termes de la somme est égal à $p+1$.

$$S_{2p+1} = -p-1$$

Variante :

On écrit $S_{2p+1} = S_{2p} - (2p+1)$ et on utilise le résultat du 1er cas.

Conclusion :

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour aller plus loin : une formule unifiée

On peut démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \mathrm{E}\left((-1)^n \dfrac{n+1}{2}\right)$ (formule trouvée par Bénédicte Folscheid).

Pour cela, posons $u_n = \mathrm{E}\left((-1)^n \dfrac{n+1}{2}\right)$.

On distingue deux cas selon que n est pair ou impair.

1er cas : n est pair

On pose $n=2p$ avec p entier naturel.

$$u_{2p}=\mathrm{E}\left((-1)^{2p}\frac{2p+1}{2}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{2p+1}{2}\right)=\mathrm{E}\left(p+\frac{1}{2}\right)=p+\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\right)=p+0=p$$

Avec l'expression trouvée précédemment, on constate que $u_{2p}=S_{2p}$.

2e cas : n est impair

On pose $n=2p+1$ avec p entier naturel.

$$u_{2p+1}=\mathrm{E}\left((-1)^{2p+1}\frac{2p+1+1}{2}\right)=\mathrm{E}\left(-\frac{2p+2}{2}\right)=\mathrm{E}(-p-1)=-p-1$$

Avec l'expression trouvée précédemment, on constate que $u_{2p+1}=S_{2p+1}$.

Conclusion :

$\forall n\in\mathbb{N}\quad S_n=u_n$

La formule est donc établie pour tout entier naturel n.

Autre piste pour trouver :

On utilise la formule $1+2x+...+nx^{n-1}=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$ valable pour tout réel $x\neq1$.

Cette formule s'obtient en dérivant de deux façons la fonction S définie par $S(x)=1+x+x^2+...+x^n$ (voir sujet bac blanc 14-2-2014 en TS).

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\left(kx^{k-1}\right)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$ ce qui donne, en multipliant les deux membres par x,

$$\sum_{k=0}^{k=n}\left(kx^{k}\right)=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}.$$

On remplace alors x par – 1 (qui est bien différent de 1).

On obtient :

$$S_n=\frac{n(-1)^{n+2}-(n+1)\times(-1)^{n+1}-1}{(-1-1)^2}$$

$$=\frac{n(-1)^{n+2}+(n+1)\times(-1)^{n+2}-1}{(-2)^2}$$

$$=\frac{n(-1)^{n}+(n+1)\times(-1)^{n}-1}{4}\ \text{ car } (-1)^{n+2}=(-1)^n\times(-1)^2=(-1)^n$$

$$=\frac{(-1)^n(n+n+1)-1}{4}$$

$$=\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$$

On obtient une formule explicite de S_n en fonction de n.

Autre méthode :

On écrit $S_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{p=\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}(-1)^{2p}\,2p+\sum_{p=0}^{p=\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{2}\right)}(-1)^{2p+1}(2p+1)$.

On poursuit ensuite $S_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{p=\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}(2p)+\sum_{p=0}^{p=\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(-(2p+1)\right)$.

On utilise la formule donnant la somme des entiers naturels consécutifs.