Terminale experts

Interrogation écrite du mercredi 25 novembre 2020

Durée : 30 minutes
- Fiche
- Calculatrice autorisée

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………..……………………………….

Note : ….. / 20

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 4 points)

1°) Écrire l'ensemble A des diviseurs de 2. ……………………………… (une seule égalité d'ensembles)

2°) Pour tout entier relatif n, on note E_n l'ensemble des diviseurs positifs communs à 2 et n.
Déterminer l'ensemble E_n. On discutera suivant les valeurs de n.

……………………………………………………..……………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………

II. (8 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 point ; 3°) 3 points)

Soit n un entier relatif quelconque. On pose $a = n^2 - 3$ et $b = n - 2$.

1°) Écrire une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs dont le résultat est un entier relatif non nul indépendant de n.

……………………………… (une seule égalité)

Les entiers a et b sont-ils premiers entre eux ? Justifier avec précision en donnant bien tous les arguments utiles.

……………………………………………………..……………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………

……………………………………………………..……………………………………………………………

2°) On suppose, dans cette question, que n est un entier impair.
Préciser si a et b sont pairs ou impairs.

……………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………………..………………………………………………………………

3°) On suppose, dans cette question, que n est un entier de la forme $3k+1$ avec k entier relatif.
Démontrer que, dans ce cas, $a+b$ est un multiple de 3.

……………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………………..………………………………………………………………

III. (3 points)

On note E l'ensemble des nombres premiers de la forme n^2+1 avec n entier naturel.
Par exemple, $5 \in E$ car $5 = 2^2 + 1$.
Donner sans justifier trois autres éléments de E.

……… ……… ………

IV. (3 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note $f(n)$ le nombre d'entiers naturels premiers avec n.
Par exemple, on a $f(2)=1$ car il y a un seul entier naturel premier avec 2, à savoir 1, $f(3)=2$ car il y a deux entiers naturels premiers avec 3, à savoir 1 et 2, $f(4)=2$ car il y a deux entiers naturels premiers avec 4, à savoir 1 et 2, $f(5)=4$ car il y a quatre entiers naturels premiers avec 5, à savoir 1, 2, 3, 4, $f(6)=2$ car il y a deux entiers naturels premiers avec 6, à savoir 1 et 5.
Compléter les égalités suivantes.

$f(8)=$…… $f(15)=$…… $f(23)=$……

Corrigé de l'interrogation écrite du 25-11-2020

I.

1°) Écrire l'ensemble A des diviseurs de 2. $A = \{-2\,;-1\,;1\,;2\}$ (une seule égalité d'ensembles)

2°) Pour tout entier relatif *n*, on note E_n l'ensemble des diviseurs positifs communs à 2 et *n*.
Déterminer l'ensemble E_n. On discutera suivant les valeurs de *n*.

Les diviseurs positifs de 2 sont 1 et 2.

On distingue deux cas selon que *n* est pair ou impair.

- Si *n* est pair, alors $E_n = \{1\,;2\}$.

- Si *n* est impair, $E_n = \{1\}$ (dans ce cas, 2 et *n* sont premiers entre eux).

II.

Soit *n* un entier relatif quelconque. On pose $a = n^2 - 3$ et $b = n - 2$.

1°) Écrire une combinaison linéaire de *a* et *b* à coefficients entiers relatifs dont le résultat est un entier relatif non nul indépendant de *n*.

$$a - (n+2)b = 1 \text{ (une seule égalité)}$$

Les entiers *a* et *b* sont-ils premiers entre eux ? Justifier avec précision en donnant bien tous les arguments utiles.

On a trouvé une combinaison linéaire de *a* et *b* à coefficients entiers relatifs dont le résultat est égal à 1.
On peut donc affirmer que *a* et *b* sont premiers entre eux.

2°) On suppose, dans cette question, que *n* est un entier impair.
Préciser si *a* et *b* sont pairs ou impairs.

Comme *n* est un entier impair, n^2 est aussi un entier impair donc *a* est un entier pair (différence de deux entiers impairs).

n est un entier impair donc *b* est un entier impair (différence d'un entier impair et d'un entier pair).

3°) On suppose, dans cette question, que *n* est un entier de la forme $3k+1$ avec *k* entier relatif.
Démontrer que, dans ce cas, $a+b$ est un multiple de 3.

$$\begin{aligned}
a+b &= n^2 + n - 5 \\
&= (3k+1)^2 + 3k + 1 - 5 \\
&= 9k^2 + 9k - 3 \\
&= 3(3k^2 + 3k - 1)
\end{aligned}$$

Comme $k \in \mathbb{Z}$, $\left(3k^2+3k-1\right) \in \mathbb{Z}$ donc $a+b$ est un multiple de 3.

III.

On note E l'ensemble des nombres premiers de la forme n^2+1 avec n entier naturel.
Par exemple, $5 \in E$ car $5=2^2+1$.
Donner sans justifier trois autres éléments de E.

2 17 37

$2=1^2+1$

$17=4^2+1$

$37=6^2+1$

À l'heure actuelle, malgré de nombreuses recherches, on ne sait toujours pas si l'ensemble E est fini ou infini c'est-à-dire s'il existe une infinité de nombres premiers de la forme n^2+1 avec n entier naturel.

IV.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note $f(n)$ le nombre d'entiers naturels premiers avec n.
Par exemple, on a $f(2)=1$ car il y a un seul entier naturel premier avec 2, à savoir 1, $f(3)=2$ car il y a deux entiers naturels premiers avec 3, à savoir 1 et 2, $f(4)=2$ car il y a deux entiers naturels premiers avec 4, à savoir 1 et 2, $f(5)=4$ car il y a quatre entiers naturels premiers avec 5, à savoir 1, 2, 3, 4, $f(6)=2$ car il y a deux entiers naturels premiers avec 6 à savoir 1 et 5.
Compléter les égalités suivantes.

$f(8)=4$ $f(15)=8$ $f(23)=22$