T1 et 4 spécialité

Interrogation écrite du mardi 24 novembre 2020

Durée : 40 minutes
- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 1$.

1°) Pour quelle valeur de u_0 la suite (u_n) est-elle constante ?

……….

2°) Dans cette question, on prend $u_0 = 5$. On admet que, dans ce cas, la suite (u_n) n'est pas majorée.

On considère l'algorithme écrit dans le cadre de gauche en langage naturel et la fonction Python écrite dans le cadre de droite où M désigne un réel.
L'exécution de l'instruction `seuil(2020)` donne 6.
Comment peut-on interpréter cette valeur ?
Répondre par une phrase.

$u \leftarrow 5$

$n \leftarrow 0$

Tantque $u \leqslant \text{M}$ **Faire**

 $u \leftarrow 3u+1$

 $n \leftarrow n+1$

FinTantque

```python
def seuil(M):
    u=5
    n=0
    while u<=M :
          u=3*u+1
          n=n+1
    return n
```

……

II. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

1°) Calculer les termes ci-dessous :

$u_1 =$ ………….. $u_2 =$ ………….. $u_3 =$ ………….. $u_4 =$ ………….. $u_5 =$ …………..

Conjecturer l'expression de u_n en fonction de *n*. Le but de la question suivante sera de démontrer cette conjecture.

……

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n - n^2$.
Démontrer que la suite (v_n) est constante. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….……………………………….

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

III. (3 points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = (-1)^n \mathrm{e}^{2n-1}$.
Déterminer la nature de la suite (u_n). On répondra avec précision.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………….……………………………..

IV. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points ; 5°) 2 points)

On considère un pavé droit ABCDEFGH. On note I un point quelconque de la droite (AB) et O le centre de la face BCGF.
Pour les trois premières questions, on répondra par oui ou non sans justifier.
On suppose que I est distinct de A et du milieu de $[AB]$ pour la question 1°) et que I est distinct de A pour les questions 2°) et 3°).

1°) Les droites (IO) et (AG) sont-elles sécantes ? ……

2°) Les droites (IO) et (AC) sont-elles coplanaires ? ……

3°) La droite (DI) et le plan (BCG) sont-ils sécants ? ……

4°) Quelle est la droite d'intersection des plans (CIF) et (ABG) ?
Répondre en recopiant et complétant l'égalité d'ensembles : $(CIF)\cap(ABG)=$........ sur la ligne ci-dessous.

……………………..………………

5°) Dans cette question, on suppose que I est le milieu de $[AB]$. Que peut-on dire de la droite (OI) et du plan (ACG) ? On justifiera avec soin en citant le théorème utilisé. Attention au vocabulaire utilisé.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

Bonus : On suppose que I est un point quelconque de $[AB]$ distinct de A et B.
Sur une figure au verso, construire le point d'intersection J de la droite (IH) et du plan (ACG). Expliquer.
On veillera à bien respecter les conventions habituelles de tracés dans l'espace (notamment les pointillés).

Corrigé de l'interrogation écrite du 24-11-2020

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 1$.

1°) Pour quelle valeur de u_0 la suite (u_n) est-elle constante ?

$$-\frac{1}{2}$$

La suite (u_n) est du type $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto 3x + 1$.

Une propriété du cours dit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (u_n) soit constante est que $u_0 = f(u_0)$ soit $u_0 = 3u_0 + 1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 2u_0 = -1$

$\Leftrightarrow u_0 = -\dfrac{1}{2}$

La valeur de u_0 pour laquelle la suite (u_n) est constante est $-\dfrac{1}{2}$.

2°) Dans cette question, on prend $u_0 = 5$. On admet que, dans ce cas, la suite (u_n) n'est pas majorée.

On considère l'algorithme écrit dans le cadre de gauche en langage naturel et la fonction Python écrite dans le cadre de droite où M désigne un réel.
L'exécution de l'instruction `seuil(2020)` donne 6.
Comment peut-on interpréter cette valeur ?
Répondre par une phrase.

$u \leftarrow 5$

$n \leftarrow 0$

Tantque $u \leqslant \text{M}$ **Faire**

$\quad u \leftarrow 3u + 1$

$\quad n \leftarrow n + 1$

FinTantque

```
def seuil(M):
    u=5
    n=0
    while u<=M :
          u=3*u+1
          n=n+1
    return n
```

Le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 2020$ est 6.

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

1°) Calculer les termes ci-dessous :

$u_1 = 1 \qquad u_2 = 5 \qquad u_3 = 10 \qquad u_4 = 17 \qquad u_5 = 26$

Conjecturer l'expression de u_n en fonction de *n*. Le but de la question suivante sera de démontrer cette conjecture.

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2 + 1$.

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n - n^2$.
Démontrer que la suite (v_n) est constante. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

On va démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = v_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)^2$$

$$= u_n + 2n + 1 - (n+1)^2$$

$$= u_n + \cancel{2n} + \cancel{1} - n^2 - \cancel{2n} - \cancel{1}$$

$$= u_n - n^2$$

$$= v_n$$

La suite (v_n) est donc constante.

On calcule $v_0 = u_0 - 0^2 = 1$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 1$. Par suite, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2 + 1$.

III.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = (-1)^n \mathrm{e}^{2n-1}$.
Déterminer la nature de la suite (u_n). On répondra avec précision.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n \mathrm{e}^{2n-1}$$

$$= (-1)^n \mathrm{e}^{2n} \times \mathrm{e}^{-1}$$

$$= (-1)^n \left(\mathrm{e}^2\right)^n \times \mathrm{e}^{-1}$$

$$= \left(-\mathrm{e}^2\right)^n \times \frac{1}{\mathrm{e}}$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $-\mathrm{e}^2$ et de premier terme $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

IV.

On considère un pavé droit ABCDEFGH. On note I un point quelconque de la droite (AB) et O le centre de la face BCGF.
Pour les trois premières questions, on répondra par oui ou non sans justifier.
On suppose que I est distinct de A et du milieu de $[AB]$ pour la question 1°) et que I est distinct de A pour les questions 2°) et 3°).

1°) Les droites (IO) et (AG) sont-elles sécantes ? oui

On considère le plan *P* contenant les points A, B, G, H.
Les points A, G, I, O appartiennent à *P* donc les droites (IO) et (AG) sont contenues dans *P*.
Ces deux droites sont donc coplanaires.
De plus, elles ne sont pas parallèles car I n'est pas confondu avec le milieu de $[AB]$ par hypothèse.
Elles sont donc sécantes.

2°) Les droites (IO) et (AC) sont-elles coplanaires ? non

3°) La droite (DI) et le plan (BCG) sont-ils sécants ? oui

4°) Quelle est la droite d'intersection des plans (CIF) et (ABG) ?
Répondre en recopiant et complétant l'égalité d'ensembles : $(CIF)\cap(ABG)=........$ sur la ligne ci-dessous.

$$(CIF)\cap(ABG)=(OI)$$

5°) Dans cette question, on suppose que I est le milieu de $[AB]$. Que peut-on dire de la droite (OI) et du plan (ACG) ? On justifiera avec soin en citant le théorème utilisé. Attention au vocabulaire utilisé.

On travaille dans le triangle ABG.
On sait par hypothèse que I est le milieu de $[AB]$.
De plus, par hypothèse, on sait que O est le centre de la face BCGF. O est donc le milieu de $[BG]$.
Par le théorème dit « de la droite des milieux dans un triangle », on peut affirmer que $(OI)\ //\ (AG)$.

Par ailleurs, la droite (AG) est incluse dans le plan (ACG).

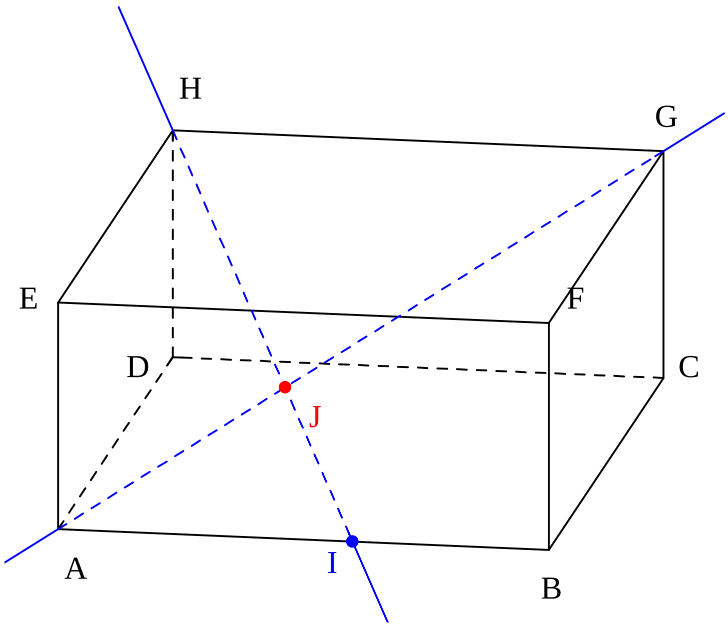
Or si une droite est parallèle à une droite incluse dans un plan, alors elle est parallèle à ce plan (théorème 3 du cours).

On en déduit que $(OI)\ //\ (ACG)$.

Bonus : On suppose que I est un point quelconque de $[AB]$ distinct de A et B.

Sur une figure au verso, construire le point d'intersection J de la droite (IH) et du plan (ACG). Expliquer.

On veillera à bien respecter les conventions habituelles de tracés dans l'espace (notamment les pointillés).



Toutes les parties cachées sont tracées en pointillés.

Les droites (IH) et (AG) sont coplanaires. En effet, elles sont toutes deux contenues dans le plan (ABG) et sécantes en un point J.

On justifie aisément que J est le point d'intersection de la droite (IH) et du plan (ACG).