T experts

Devoir pour le mercredi 25 novembre 2020

Numéro : ….. **Prénom et nom : ……………………………………………………** **Note : ….. / 20**

À tout réel θ on associe la matrice $\mathrm{M}(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

1°) Justifier que pour tout réel θ, la matrice $\mathrm{M}(\theta)$ est inversible et que $\left[\mathrm{M}(\theta)\right]^{-1}=\mathrm{M}(-\theta)$.

……

……

……

……

……

……

2°) Démontrer que pour tout couple $(\theta_1\,;\theta_2)$ de réels, on a $\mathrm{M}(\theta_1)\mathrm{M}(\theta_2)=\mathrm{M}(\theta_1+\theta_2)$.
On rappelle les formules suivantes, dites formules d'addition pour le cosinus et le sinus, valables pour tout couple $(a\,;b)$ de réels : $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ et $\sin(a+b)=\sin a\sin b+\sin b\cos a$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

3°) Généraliser sans justifier la formule de la question précédente pour un produit $\mathrm{M}(\theta_1)\mathrm{M}(\theta_2)...\mathrm{M}(\theta_n)$ où θ_1, θ_2, …, θ_n sont *n* réels quelconques (*n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).

……

……

……

En déduire que $\left[\mathrm{M}(\theta)\right]^{n}=\mathrm{M}(n\theta)$ pour tout entier naturel *n*.

……

……

……

4°) Retrouver le résultat de la question 1°) à l'aide de la formule démontrée à la question 2°).

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du devoir pour le 25-11-2020

À tout réel θ on associe la matrice $M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

1°) Justifier que pour tout réel θ, la matrice $M(\theta)$ est inversible et que $\left[M(\theta)\right]^{-1}=M(-\theta)$.

$\det M(\theta)=\cos\theta\times\cos\theta+\sin\theta\times\sin\theta=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$\forall\theta\in\mathbb{R}\quad \det M(\theta)\neq 0$ donc la matrice $M(\theta)$ est inversible pour tout réel θ.

On applique la formule qui permet d'inverser une matrice carrée d'ordre 2.

$$\forall\theta\in\mathbb{R}\quad \left[M(\theta)\right]^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix} \quad \text{(on utilise les formules de trigonométrie)}$$

$$=M(-\theta)$$

2°) Démontrer que pour tout couple $(\theta_1\,;\theta_2)$ de réels, on a $M(\theta_1)M(\theta_2)=M(\theta_1+\theta_2)$.
On rappelle les formules suivantes, dites formules d'addition pour le cosinus et le sinus, valables pour tout couple $(a\,;b)$ de réels : $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ et $\sin(a+b)=\sin a\sin b+\sin b\cos a$.

$$M(\theta_1)M(\theta_2)=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_2\cos\theta_1\\ \sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1 & \cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}$$

$$=M(\theta_1+\theta_2)$$

3°) Généraliser sans justifier la formule de la question précédente pour un produit $M(\theta_1)M(\theta_2)...M(\theta_n)$ où θ_1, θ_2, …, θ_n sont n réels quelconques (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).

$$\forall(\theta_1,\theta_2,...,\theta_n)\in\mathbb{R}^n\quad M(\theta_1)M(\theta_2)...M(\theta_n)=M(\theta_1+\theta_2+...+\theta_n)$$

On peut écrire cette formule avec les symboles Σ et Π :

$$\forall(\theta_1,\theta_2,...,\theta_n)\in\mathbb{R}^n\quad \prod_{i=0}^{i=n}M(\theta_i)=M\left(\sum_{k=0}^{k=n}\theta_i\right).$$

En déduire que $\left[M(\theta)\right]^n=M(n\theta)$ pour tout entier naturel n.

1^er^ cas : n est un entier naturel supérieur ou égal à 1

$$\left[M(\theta)\right]^n=\underbrace{M(\theta)\times M(\theta)\times...\times M(\theta)}_{n\text{ facteurs}}$$

$$=\underbrace{M(\theta+\theta+...+\theta)}_{n\text{ termes}}$$

$$=M(n\theta)$$

2^e^ cas : $n=0$

Dans ce cas, la formule trouvée précédemment fonctionne encore puisque $\left[M(\theta)\right]^0=I_2$ par convention et $M(0)=I_2$ (cf. question suivante).

4°) Retrouver le résultat de la question 1°) à l'aide de la formule démontrée à la question 2°).

$$\forall\theta\in\mathbb{R}\quad M(\theta)M(-\theta)=M(\theta-\theta)$$

$$=M(0)$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=I_2$$

On en déduit que la matrice $M(\theta)$ est inversible pour tout réel θ et son inverse est la matrice $M(-\theta)$.