T1 spécialité

Interrogation écrite du mardi 10 novembre 2020

Durée : 30 minutes
- Ni fiche
- Ni calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : …………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (3 points)

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = (2n)! - n!$.

Calculer u_0, u_1, u_2.

$u_0 = \ldots\ldots$ (un seul résultat) $u_1 = \ldots\ldots$ (un seul résultat) $u_2 = \ldots\ldots$ (un seul résultat)

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = {u_n}^2 + \dfrac{3}{n+5}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_1 et u_2. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
2°) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}, *n* étant un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

1°) $u_1 = \ldots\ldots\ldots$ (un seul résultat) $u_2 = \ldots\ldots\ldots$ (un seul résultat) ; 2°) ………………………………………..

III. (1 point)

Soit *f* une fonction définie sur une partie *D* de $\mathbb{R}$ telle que $f(D) \subset D$.

Soit $\left(u_n\right)$ une suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in D$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

La suite $\left(u_n\right)$ est constante si et seulement si ………………… .

IV. (2 points)

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout entier naturel *n*. Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n - 3$.

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

……………………………… (une seule égalité)

V. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k}{k+1}$.

1°) Calculer S_2.

$S_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ (un seul résultat sous forme de fraction irréductible)

2°) Compléter l'égalité :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{n+1} - S_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (un seul résultat en fonction de n)

VI. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

On rappelle l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$.

À l'aide de cet encadrement, démontrer que la suite (u_n) est bornée.

………..

………..

………..

………..

VII. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$ ainsi que par les relations de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n$ et $v_{n+1} = u_n - v_n$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_1 et u_2.

$u_1 = \ldots\ldots$ (un seul résultat) $\qquad u_2 = \ldots\ldots$ (un seul résultat)

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….……………………………….

2°) L'algorithme écrit dans le cadre ci-dessous permet d'obtenir la valeur du terme d'indice *n* pour chacune des deux suites, *n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Compléter l'instruction manquante sur la ligne en pointillés (on utilise une double affectation).

$u, v \leftarrow 2, 1$
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
    $u, v \leftarrow$ …………………..
FinPour

VIII. (1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 - 2u_n$ pour tout entier naturel *n*.
L'algorithme écrit dans le cadre ci-dessous permet, pour un entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, d'obtenir la valeur de $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
Compléter l'instruction manquante.

$u \leftarrow -5$
$S \leftarrow u$
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
    $u \leftarrow 1 - 2u$
    $S \leftarrow$………………
FinPour

IX. (1 point)

En septembre 2020, les parents d'un enfant qui vient de naître décident de déposer la somme de 2 euros sur un compte en banque et d'effectuer tous les mois un versement d'argent dont le montant augmentera à chaque fois de 1 % par rapport au versement précédent.
Pour tout entier naturel *n*, on note u_n le montant du versement en euros au bout de *n* mois. On a donc $u_0 = 2$.

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de (u_n) ?

$\forall n \in \mathbb{N}$ …………………… (une seule égalité)

……..

Corrigé de l'interrogation écrite du 10-11-2020

I.

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n=\left(2n\right)!-n!$.
Calculer u_0, u_1, u_2.

$u_0=0$ (un seul résultat) $u_1=1$ (un seul résultat) $u_2=22$ (un seul résultat)

II.

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=-1$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=u_n{}^2+\dfrac{3}{n+5}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_1 et u_2. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
2°) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}, *n* étant un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

1°) $u_1=\dfrac{8}{5}$ (un seul résultat) $u_2=\dfrac{153}{50}$ (un seul résultat) ; 2°) $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n=u_{n-1}{}^2+\dfrac{3}{n+5}$

$$u_2=\frac{64}{25}+\frac{3}{6}=\frac{64}{25}+\frac{1}{2}=\frac{153}{50}$$

III.

Soit *f* une fonction définie sur une partie *D* de $\mathbb{R}$ telle que $f\left(D\right)\subset D$.
Soit $\left(u_n\right)$ une suite définie par la donnée de son premier terme $u_0\in D$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.

La suite $\left(u_n\right)$ est constante si et seulement si $f\left(u_0\right)=u_0$.

IV.

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1}=2u_n+1$ pour tout entier naturel *n*. Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n=u_n-3$.
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_{n+1}=2v_n+4 \text{ (une seule égalité)}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 3$

$= 2u_n + 1 - 3$

$= 2u_n - 2$

$= 2(v_n + 3) - 2$

$= 2v_n + 4$

V.

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k}{k+1}$.

1°) Calculer S_2.

$S_2 = \frac{7}{6}$ (un seul résultat sous forme de fraction irréductible)

$$S_2 = \sum_{k=0}^{k=2} \frac{k}{k+1}$$

$$= \frac{0}{0+1} + \frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{7}{6}$$

2°) Compléter l'égalité :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{n+1} - S_n = \frac{n+1}{n+2}$ (un seul résultat en fonction de n)

VI.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

On rappelle l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$.

À l'aide de cet encadrement, démontrer que la suite (u_n) est bornée.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$.

On multiplie ensuite chaque membre de cet encadrement par 3.

Comme 3 est un réel strictement positif, le sens des inégalités est conservé.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < \frac{3}{n} \leqslant 3$.

On ajoute 2 à chaque membre de cet encadrement.

On obtient $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2 < 2 + \frac{3}{n} \leqslant 5$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2 < u_n \leqslant 5$.

On en déduit l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2 \leqslant u_n \leqslant 5$ qui permet d'affirmer que la suite (u_n) est bornée.

VII.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$ ainsi que par les relations de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n$ et $v_{n+1} = u_n - v_n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_1 et u_2.

$u_1 = 7$ (un seul résultat) $\qquad$ $u_2 = 17$ (un seul résultat)

2°) L'algorithme écrit dans le cadre ci-dessous permet d'obtenir la valeur du terme d'indice *n* pour chacune des deux suites, *n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Compléter l'instruction manquante sur la ligne en pointillés (on utilise une double affectation).

```
u, v ← 2, 1
Pour i allant de 1 à n Faire
        u, v ← 2u + 3v , u − v
FinPour
```

Attention, on ne peut pas remplacer l'instruction « $u,\ v \leftarrow 2u + 3v\ ,\ u - v$ » par le bloc $\boxed{\begin{array}{l} u \leftarrow 2u + 3v \\ v \leftarrow u - v \end{array}}$.

Il faut utiliser une variable transitoire pour stocker la valeur de *u*.

$$\boxed{\begin{array}{l} t \leftarrow u \\ u \leftarrow 2u + 3v \\ v \leftarrow t - v \end{array}}$$

VIII.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 - 2u_n$ pour tout entier naturel *n*.
L'algorithme écrit dans le cadre ci-dessous permet, pour un entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, d'obtenir la valeur de $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
Compléter l'instruction manquante.

$u \leftarrow -5$

$S \leftarrow u$

Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**

  $u \leftarrow 1 - 2u$

  $S \leftarrow S + u$

FinPour

IX.

En septembre 2020, les parents d'un enfant qui vient de naître décident de déposer la somme de 2 euros sur un compte en banque et d'effectuer tous les mois un versement d'argent dont le montant augmentera à chaque fois de 1 % par rapport au versement précédent.
Pour tout entier naturel *n*, on note u_n le montant du versement en euros au bout de *n* mois. On a donc $u_0 = 2$.

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de (u_n) ?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1{,}01 u_n \text{ (une seule égalité)}$$

On utilise le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 1 % : $1 + \frac{1}{100} = 1{,}01$.
On écrit toujours les coefficients multiplicateurs sous forme décimale.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,01.