T experts

Interrogation écrite du mercredi 18 novembre 2020

Durée : 40 minutes
À disposition :
- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….……………………………….

Note : ….. / 20

I. (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-2\text{i})^2=-9 \quad (1)$.

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

II. (12 points : 1°) 8 points : 2 points par calcul ; 2°) a) 2 points ; b) 2 points)

Soit a et b deux nombres complexes. On considère les matrices $\text{A}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $\text{B}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer AB, BA, A^2 et B^2. Écrire un calcul par ligne.

2°) On pose $\text{C}=\text{A}+\text{B}$.

a) Démontrer que $\text{C}^2=(a+b)\text{C}$.

b) On pose $\text{U}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\text{V}=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$. Calculer UV. Que constate-t-on ?

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

III. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

1°) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer le déterminant de A. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

2°) À l'aide de la question précédente, résoudre le système $\begin{cases} z - z' = i & (1) \\ iz + z' = 1 & (2) \end{cases}$ d'inconnue $(z\,;z') \in \mathbb{C}^2$.

On donnera z et z' sous forme algébrique.

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

IV. (1 point)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que A est inversible.

À l'aide de la calculatrice, déterminer son inverse
en écrivant les coefficients sous forme fractionnaire.

………………….......................................

Corrigé de l'interrogation écrite du 18-11-2020

I.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-2\text{i})^2=-9 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow z-2\text{i}=3\text{i}$ ou $z-2\text{i}=-3\text{i}$

$\Leftrightarrow z=5\text{i}$ ou $z=-\text{i}$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S=\{5\text{i}\,;-\text{i}\}$

On ne développe surtout pas le membre de gauche.

II.

Soit a et b deux nombres complexes. On considère les matrices $\text{A}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $\text{B}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer AB, BA, A^2 et B^2. Écrire un calcul par ligne.
2°) On pose $\text{C}=\text{A}+\text{B}$.
a) Démontrer que $\text{C}^2=(a+b)\text{C}$.

b) On pose $\text{U}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\text{V}=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$. Calculer UV. Que constate-t-on ?

1°)

$$\text{AB}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & ab \\ ab & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{BA}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & b^2 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{A}^2=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{B}^2=\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$$

2°)

a)

On a $C=\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$.

$$C^2=\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^2+ab & ab+b^2 \\ a^2+ab & ab+b^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a(a+b) & b(a+b) \\ a(a+b) & b(a+b) \end{pmatrix}$$

$$=(a+b)\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$=(a+b)C$$

b)

$UV=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ [On effectue le produit d'une matrice de format (2, 1) par une matrice de format (1, 2). On obtient donc une matrice de format (2, 2)]

$$=\begin{pmatrix} 1\times a & 1\times b \\ 1\times a & 1\times b \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$$

On constate que le produit matriciel UV est égal à la matrice C.

III.

1°) On pose $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer le déterminant de A. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

$\det A = 1\times 1-\mathrm{i}\times(-1)=1+\mathrm{i}$

$\det A \neq 0$ donc A est inversible.

Dans ce cas, on peut écrire $A^{-1}=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$ (formule de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2).

Il n'est pas obligatoire à ce stade d'écrire $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$ sous forme algébrique.

2°) À l'aide de la question précédente, résoudre le système $\begin{cases} z-z'=\mathrm{i} & (1) \\ \mathrm{i}z+z'=1 & (2) \end{cases}$ d'inconnue $(z\,;z')\in\mathbb{C}^2$.

On donnera z et z' sous forme algébrique.

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{A}\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}=\mathrm{A}^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}=\frac{1}{1+\mathrm{i}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}=\frac{1}{1+\mathrm{i}}\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{2}{1+\mathrm{i}} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ z'=1-\mathrm{i} \end{cases}$$

La solution du système est le couple $(1\,;1-\mathrm{i})$.

IV.

On considère la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que A est inversible.

À l'aide de la calculatrice, déterminer son inverse
en écrivant les coefficients sous forme fractionnaire.

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$