T experts

Devoir pour le mardi 10 novembre 2020

Écrire très lisiblement, sans faire de ratures et sans utiliser d'abréviations.
Utiliser un stylo à plume.

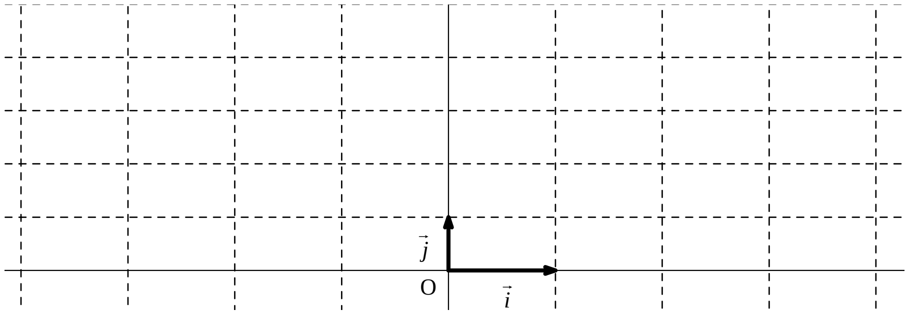
Note : …. / 20

Prénom : …………………………………… **Nom : ……………………………………………………………**

I. On considère l'équation $e^x = 2 - x$ (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On admet que (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on notera α dont on ne cherchera pas à déterminer la valeur exacte.

1°) Sur le graphique ci-dessous, mettre en évidence α à l'aide de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle et d'une droite D dont on donnera une équation.



2°) À l'aide de la calculatrice ou du site dcode, déterminer l'approximation décimale par défaut d'ordre 3 de α.

…………………. (un seul résultat sans égalité)

3°) Le but de cette question est de démontrer que α est un nombre irrationnel.
Pour cela, on admettra la propriété P (voir note ci-contre à la fin de l'exercice) suivante :

> Si x est un nombre rationnel non nul, alors e^x est un nombre irrationnel.

On effectue un raisonnement par l'absurde en supposant que α est un nombre rationnel (hypothèse H).
Que peut-on alors dire de la nature des nombres e^α et $2-\alpha$? Justifier de manière très concise.

………

………

………

Aboutir à une contradiction et conclure.

………

………

………

………

………

………

La démonstration de P nécessite des outils qui dépassent le programme de terminale (voir par exemple sujet de Capes externe 2005).

II. L'affirmation « Pour tout réel x, la matrice $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ x+1 & x \end{pmatrix}$ est inversible » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

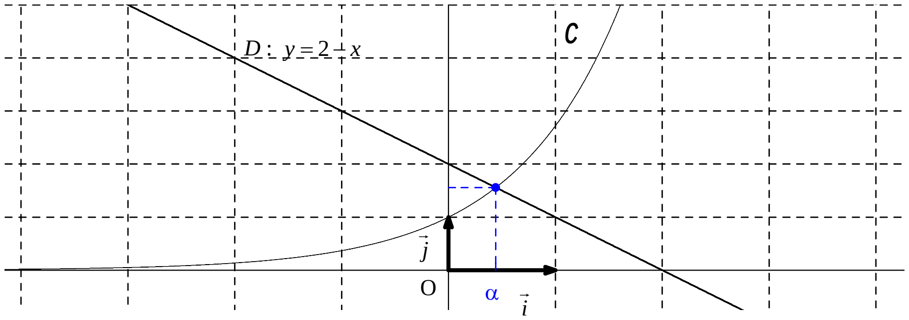
………

Corrigé du devoir pour le 10-11-2020

I. On considère l'équation $e^x = 2 - x$ (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On admet que (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on notera α dont on ne cherchera pas à déterminer la valeur exacte.

1°) Sur le graphique ci-dessous, mettre en évidence α à l'aide de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle et d'une droite D dont on donnera une équation.



2°) À l'aide de la calculatrice ou du site dcode, déterminer l'approximation décimale par défaut d'ordre 3 de α.

0,442 (un seul résultat sans égalité)

Le site dcode fournit $\alpha = 0,44285...$.

3°) Le but de cette question est de démontrer que α est un nombre irrationnel.
Pour cela, on admettra la propriété *P* (voir note ci-contre à la fin de l'exercice) suivante :

Si x est un nombre rationnel non nul, alors e^x est un nombre irrationnel.

On effectue un raisonnement par l'absurde en supposant que α est un nombre rationnel (hypothèse H).
Que peut-on alors dire de la nature des nombres e^α et $2 - \alpha$? Justifier de manière très concise.

On fait l'hypothèse que α est un nombre rationnel (hypothèse H).

On peut alors dire que :

- e^α est un nombre irrationnel d'après la propriété *P* puisque $\alpha \neq 0$;
- $2 - \alpha$ est un nombre rationnel.

Aboutir à une contradiction et conclure.

Comme α est solution de (E), les nombres e^α et $2 - \alpha$ sont égaux (puisque $e^\alpha = 2 - \alpha$).

Or un nombre ne peut être à la fois rationnel et irrationnel.

Ainsi, l'hypothèse H est fausse et l'on en déduit que α est un nombre irrationnel.

On peut démontrer que α est un nombre transcendant en utilisant le théorème d'Hermite-Lindemann qui affirme que pour tout nombre algébrique x non nul, le nombre e^x est transcendant (démontré en 1882 par Ferdinand von Lindemann).

II. L'affirmation « Pour tout réel x, la matrice $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ x+1 & x \end{pmatrix}$ est inversible » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

On calcule le déterminant de A.

$\det A = x \times x - (x+1) \times (-1)$

$= x^2 + x + 1$

det A est un polynôme du second degré en x.

Son discriminant est égal à – 3.

Comme il est strictement négatif, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \det A \neq 0$.

L'affirmation est donc vraie : la matrice A est inversible pour tout réel x.

Complément : On peut donner l'expression de l'inverse de A : $A^{-1} = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}\begin{pmatrix} x & 1 \\ -x-1 & x \end{pmatrix}$.