T
spécialité

Devoir pour le jeudi 5 novembre 2020

Écrire très lisiblement, sans ratures et sans utiliser d'abréviations.
Utiliser un stylo à plume.

Note : …. / 20

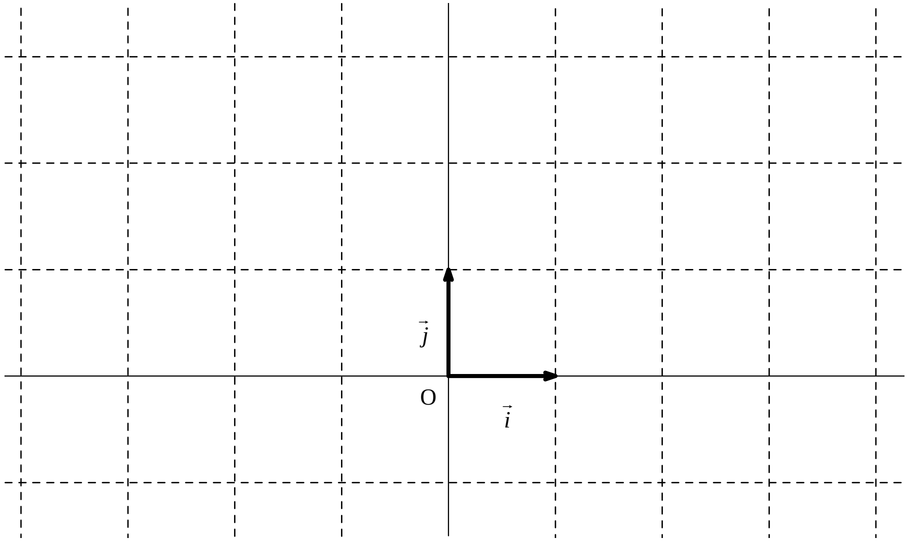
Prénom : ………………………………… **Nom : ……………………………………………………**

I. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}_0$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \text{e}^{x-1}$.

1°) Par quelle transformation géométrique du plan passe-t-on de $\mathcal{C}_0$ à $\mathcal{C}$?
Répondre, sans justifier, avec précision en complétant la phrase ci-dessous.

On passe de $\mathcal{C}_0$ à $\mathcal{C}$ par ……………………………………………………………………………………

Tracer avec soin $\mathcal{C}$ sur le graphique ci-dessous. Le tracé de $\mathcal{C}_0$ n'est pas demandé.



2°) Placer sur le graphique le point A de coordonnées $(1\,;1)$ [on vérifie aisément par le calcul qu'il appartient à $\mathcal{C}$] puis tracer le cercle Γ de centre O passant par A. Il recoupe la courbe $\mathcal{C}$ en un point B.
Déterminer l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de l'abscisse de B.

L'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de x_{B} est ……………….. .

Expliquer brièvement la démarche sur les lignes ci-contre.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. Soit m un réel strictement positif fixé.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left|\ln x - 1\right| \geqslant m \quad (1)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du devoir pour le 5-11-2020

I. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}_0$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{x-1}$.

1°) Par quelle transformation géométrique du plan passe-t-on de $\mathcal{C}_0$ à $\mathcal{C}$?
Répondre, sans justifier, avec précision en complétant la phrase ci-dessous.

On passe de $\mathcal{C}_0$ à $\mathcal{C}$ par ……………………………………………………………………………………

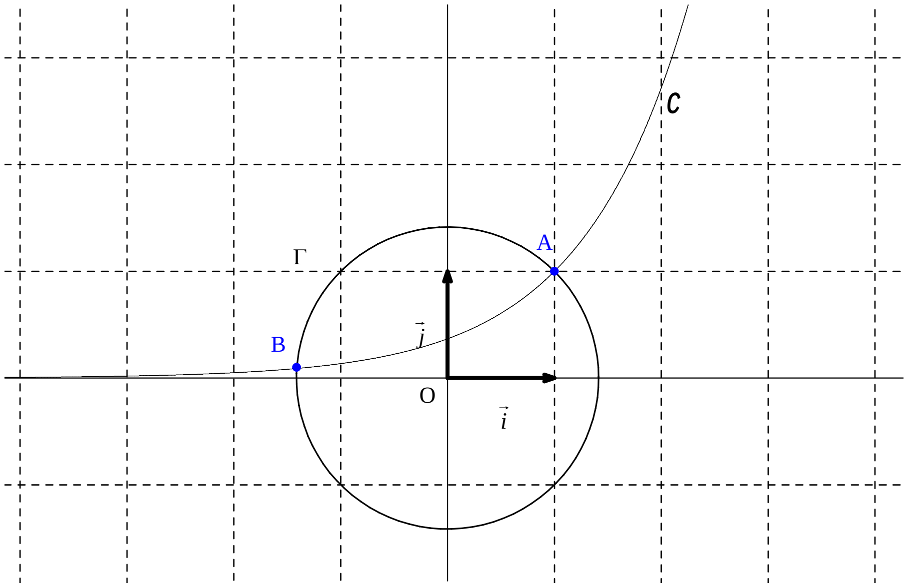
Tracer avec soin $\mathcal{C}$ sur le graphique ci-dessous. Le tracé de $\mathcal{C}_0$ n'est pas demandé.

Il y a deux façons :

On passe de $\mathcal{C}_0$ à $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $\vec{i}$.

On passe de $\mathcal{C}_0$ à $\mathcal{C}$ par l'affinité orthogonale d'axe (Oy) et de rapport $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Cette deuxième façon se justifie en considérant la transformation d'écriture $\mathrm{e}^{x-1} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1}$ soit $\mathrm{e}^{x-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \times \mathrm{e}^x$.



2°) Placer sur le graphique le point A de coordonnées $(1\,;1)$ [on vérifie aisément par le calcul qu'il appartient à $\mathcal{C}$] puis tracer le cercle Γ de centre O passant par A. Il recoupe la courbe $\mathcal{C}$ en un point B.
Déterminer l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de l'abscisse de B.

L'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de x_{B} est – 1,412.

Expliquer brièvement la démarche sur les lignes ci-contre.

On commence par chercher une équation de Γ.

Le rayon de Γ est égal à OA que l'on calcule aisément par la formule de la distance de deux points dans un repère orthonormé (ici le carré de la distance d'un point à l'origine du repère est à la somme des carrés des coordonnées) ou directement théorème de Pythagore sur le graphique).

On trouve $\mathrm{OA}^2 = 2$.

Γ a donc pour équation $x^2 + y^2 = 2$.

Les couples de coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ sont donc les solutions du système $\begin{cases} y = \mathrm{e}^{x-1} \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système non linéaire qu'il n'est pas possible de résoudre de manière exacte.

On peut utiliser le site dcode pour obtenir une résolution approchée.

On obtient que l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de x_{B} est – 1,412.

Remarques :

On peut démontrer que les coordonnées de B sont des nombres irrationnels (voir devoir donnée en « Mathématiques experts » en novembre 2020).

On peut aussi démontrer que le système est équivalent au système $\begin{cases} y = \mathrm{e}^{x-1} \\ x^2 + \left(\mathrm{e}^{x-1}\right)^2 = 2 \end{cases}$ (obtenu par substitution) soit $\begin{cases} y = \mathrm{e}^{x-1} \\ x^2 + \mathrm{e}^{2x-2} = 2 \end{cases}$.

On s'intéresse ensuite à l'équation $x^2 + \mathrm{e}^{2x-2} = 2$.

On ne peut pas résoudre cette équation de manière exacte. On cherche donc à la résoudre de manière approchée.

On peut utiliser directement la calculatrice ou dcode.

Sinon, on effectue la méthode de balayage en considérant la fonction $f : x \mapsto x^2 + \mathrm{e}^{2x-2}$.
Il faut se placer sur un intervalle où f est strictement monotone (on peut l'admettre éventuellement).

II. Soit m un réel strictement positif fixé.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left|\ln x - 1\right| \geqslant m \quad (1)$.

Le premier membre n'a de sens que pour $x > 0$.

On résout donc (1) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(1) \Leftrightarrow \ln x - 1 \geqslant m$ ou $\ln x - 1 \leqslant -m$

$\Leftrightarrow \ln x \geqslant m + 1$ ou $\ln x \leqslant 1 - m$

$\Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^{m+1}$ ou $x \leqslant \mathrm{e}^{1-m}$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S = \left]0 ; \mathrm{e}^{1-m}\right] \cup \left[\mathrm{e}^{1+m} ; +\infty\right[$

On vérifie la résolution avec le site dcode.