**T experts**

# Devoir pour le mardi 13 octobre 2020

**Écrire très lisiblement, sans faire de ratures et sans utiliser d'abréviations.**
**Utiliser un stylo à plume.**

**Note : …. / 20**

---

**Prénom : …………………………………** **Nom : ……………………………………………………**

---

**I.** On note $E$ l'ensemble des entiers naturels de la forme $17k-1$ où $k$ est un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $F$ l'ensemble des carrés parfaits.
On considère une urne qui contient cent boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 100.
On tire une boule dans l'urne et on note son numéro.

1°) Quel est l'univers des possibles $\Omega$ de l'expérience aléatoire ?

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

2°) On note $P$ la loi d'équiprobabilité sur $\Omega$.
On considère les événements A : « Le numéro de la boule tirée appartient à $E$ » et B : « Le numéro de la boule tirée appartient à $F$ ».
Les événements A et B sont-ils indépendants pour $P$ ? Justifier.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

---

**II.** Est-il possible d'écrire 2020 comme combinaison linéaire de 3 et – 27 à coefficients entiers relatifs ?
Justifier.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

---

**III.** Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on pose $S_n = \sum_{k=3}^{k=n} \frac{2}{k-2}$.

1°) On considère la proposition $P$ : « Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $S_n$ est un nombre rationnel ».
La proposition $P$ est-elle vraie ou fausse ? Justifier très brièvement.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

2°) Quelle est la plus petite valeur de $n$ telle que $S_n$ est un nombre rationnel non décimal ?

………… (une seule réponse sans égalité)

# Corrigé du devoir pour le 13-10-2020

**I.** On note $E$ l'ensemble des entiers naturels de la forme $17k-1$ où $k$ est un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $F$ l'ensemble des carrés parfaits.
On considère une urne qui contient cent boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 100.
On tire une boule dans l'urne et on note son numéro.

1°) Quel est l'univers des possibles $\Omega$ de l'expérience aléatoire ?

L'univers des possibles est l'ensemble des boules de l'urne.

On évite d'écrire $\Omega = [\![1;100]\!]$ pour ne pas commettre une confusion abusive entre les boules et leurs numéros.

2°) On note $P$ la loi d'équiprobabilité sur $\Omega$.
On considère les événements A : « Le numéro de la boule tirée appartient à $E$ » et B : « Le numéro de la boule tirée appartient à $F$ ».
Les événements A et B sont-ils indépendants pour $P$ ? Justifier.

Les boules dont le numéro appartient à $E$ sont les boules portant les numéros 16, 33, 50, 67, 84.

Par conséquent, $P(\text{A}) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.

Les boules dont le numéro appartient à $F$ sont les boules portant les numéros : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Par conséquent, $P(\text{B}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

On a $P(\text{A}) \times P(\text{B}) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{200}$.

Le seul numéro qui appartient à E et à F est 16 donc $P(\text{A} \cap \text{B}) = \frac{1}{100}$.

On remarque que $P(\text{A} \cap \text{B}) \neq P(\text{A}) \times P(\text{B})$.

Les événements A et B ne sont donc pas indépendants pour $P$.

---

**II.** Est-il possible d'écrire 2020 comme combinaison linéaire de 3 et – 27 à coefficients entiers relatifs ? Justifier.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

Soit $u$ et $v$ deux entiers relatifs quelconques.
On a $3u - 27v = 3(u - 9v)$.
Comme $u$ et $v$ sont des entiers relatifs, $u - 9v$ est un entier relatif.

Or 2020 ne peut s'écrire comme produit de 3 par un entier relatif.

On en déduit qu'il n'est pas possible d'écrire 2020 comme combinaison linéaire de 3 et – 27 à coefficients entiers relatifs.
On peut dire que 2020 n'est pas un multiple de 3 (en se référant au critère sur la somme des chiffres).

2$^{\text{e}}$ méthode :

On raisonne par l'absurde.
On suppose que 2020 peut s'écrire comme combinaison linéaire de 3 et – 27 à coefficients entiers relatifs.
Il existe donc deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $2020 = 3u - 27v$.
On aurait alors $2020 = 3(u - 9v)$ soit $u - 9v = \frac{2020}{3}$.
Or $u - 9v$ est un entier relatif et $\frac{2020}{3}$ n'est pas un entier relatif.
D'où l'absurdité.
Il n'est donc pas possible d'écrire 2020 comme combinaison linéaire de 3 et – 27 à coefficients entiers relatifs.

---

**III.** Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on pose $S_n = \sum_{k=3}^{k=n} \frac{2}{k-2}$.

1°) On considère la proposition $P$ : « Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $S_n$ est un nombre rationnel ».
La proposition $P$ est-elle vraie ou fausse ? Justifier très brièvement.

Chaque terme de la somme est le quotient de deux entiers naturels donc chaque terme de la somme est un nombre rationnel.
Or la somme de nombres rationnels est un rationnel.
On en déduit que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $S_n$ est un nombre rationnel.
La proposition $P$ est donc vraie.

2°) Quelle est la plus petite valeur de $n$ telle que $S_n$ est un nombre rationnel non décimal ?

5 (une seule réponse sans égalité)

On calcule $S_3$, $S_4$, $S_5$.

$$S_3 = \sum_{k=3}^{k=3} \frac{2}{k-2} = \frac{2}{3-2} = 2$$

$$S_4 = \sum_{k=3}^{k=4} \frac{2}{k-2} = S_1 + \frac{2}{4-2} = 2 + 1 = 3$$

$$S_5 = \sum_{k=3}^{k=5} \frac{2}{k-2} = S_2 + \frac{2}{5-2} = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$