T experts

Contrôle du samedi 3 octobre 2020 (1 h 30)

À disposition :
- fiche
- calculatrice

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……… / 20

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1°) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $f(\ln n)$ est un nombre rationnel.

……

……

……

……

2°) Donner, sans justifier, trois valeurs d'un entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $f(\ln n)$ soit un nombre décimal.

………………………………………………... (écrire les valeurs séparées par des points-virgules)

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On note *a* et *b* deux entiers naturels compris entre 1 et 9.

On pose $\mathrm{N} = \overline{abab}^{(10)}$ et $\mathrm{N'} = \overline{baba}^{(10)}$.

1°) Écrire la décomposition en base dix de N. En déduire que N s'écrit sous la forme $\mathrm{N} = 101 \times k$ où *k* est un entier naturel que l'on précisera en fonction de *a* et *b*.

……

……

……

……

2°) Justifier que $\mathrm{N} + \mathrm{N'} = (a+b) \times m$ où *m* est un entier naturel indépendant de *a* et *b* dont on donnera la valeur.

……

……

……

3°) Dans cette question, on prend $a = 2$ et $b = 3$. Déterminer l'écriture en base treize de N (en utilisant les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C).

……………………………

III. (5 points : 1°) 4 points / 1 point par nombre ; 2°) 1 point)

1°) Écrire le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres de la colonne de gauche et justifier par un calcul dans la colonne de droite.

$a = \left(1 - \mathrm{e}^{-\ln 3}\right)^2 - 2$	…………	……………………………………………………… ………………………………………………………
$b = \dfrac{\ln 4}{\ln \frac{1}{2}}$	…………	……………………………………………………… ………………………………………………………
$c = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{\ln 3}\right)^{2020}}{\mathrm{e}^{\ln 2} - 1}$	…………	……………………………………………………… ………………………………………………………
$d = \mathrm{i} \times (1 + \mathrm{i})^2$	…………	……………………………………………………… ………………………………………………………

2°) Compléter par le symbole $\in$ ou $\notin$:

e …… $\mathbb{Q}$

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

La numération sexagésimale (en base soixante) exigerait l'utilisation de soixante chiffres distincts !
En pratique, on décide d'écrire chacun de ces chiffres en utilisant le codage en base dix du nombre qu'il représente et en l'écrivant entre parenthèses.

Par exemple, $\overline{(2)(19)(51)}^{(60)}$ est l'écriture sexagésimale du nombre qui s'écrit 8391 en base dix :

$\overline{(2)(19)(51)}^{(60)} = 2\times 3600 + 19\times 60 + 51$ soit $\overline{(2)(19)(51)}^{60} = 8391$.

1°) Écrire en base dix le nombre A dont l'écriture sexagésimale est $\overline{(3)(0)(17)(48)}^{(60)}$.

…………………………………… (une seule égalité)

2°) Déterminer l'écriture sexagésimale du nombre B qui s'écrit 54 325 432 en base dix.

…………………………………… (une seule égalité)

3°) Soit N un entier naturel dont l'écriture sexagésimale est $\overline{(ab)(ba)}^{(60)}$, a et b étant deux chiffres de notre système de numération en base dix tels que $1 \leqslant a \leqslant 5$ et $1 \leqslant b \leqslant 5$.
Exprimer N en fonction de a et b.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) Calculer $z_1 = \dfrac{1}{\mathrm{i}} - \dfrac{2}{1+\mathrm{i}} \times \dfrac{1}{1-\dfrac{2}{\mathrm{i}}}$. On donnera le résultat sous forme algébrique.

…………………………………… (une seule égalité)

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) On pose $z_2 = \sqrt{\sqrt{2}+1} + \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}-1}$.
Calculer $z_2{}^2$.

…………………………………… (une seule égalité)

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VI. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$\dfrac{z-1}{z+1} = \mathrm{i}$ (1) $z^4 + 5z^2 - 36 = 0$ (2).

Écrire ci-dessous les ensembles solutions respectifs S_1 et S_2 de (1) et (2) (une seule égalité à chaque fois) :

…………………………………………… ……………………………………………

Écrire la résolution sur la copie.

VII. (1 point)

Résoudre le système $\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2\mathrm{i} \end{cases}$ d'inconnue $(z_1 ; z_2) \in \mathbb{C}^2$.

Écrire ci-dessous l'ensemble S des solutions (une seule égalité) :

……………………………………………

Écrire la résolution sur la copie.

Bonus (1 point) : On considère l'ensemble $\mathrm{A} = \{-3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3\}$.

Combien y a-t-il de couples $(a ; b)$ d'éléments de A tels que le quotient $\dfrac{a}{b}$ soit un nombre rationnel non décimal ?

Écrire la liste de ces couples.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 3-10-2020

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

1°) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $f(\ln n)$ est un nombre rationnel.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(\ln n) = \frac{e^{\ln n}}{e^{\ln n}+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

n et $n+1$ sont des entiers naturels donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $f(\ln n)$ est un nombre de la forme $\dfrac{x}{y}$ où x et y sont des entiers relatifs (même naturels), y étant non nul.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(\ln n) \in \mathbb{Q}$.

On peut noter qu'un théorème du cours (admis) dit que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, ln n est un nombre irrationnel (même transcendant).

2°) Donner, sans justifier, trois valeurs d'un entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $f(\ln n)$ soit un nombre décimal.

1 ; 3 ; 4 (écrire les valeurs séparées par des points-virgules)

Il y a une infinité d'entiers naturels $n \geqslant 1$ tels que $f(\ln n)$ soit un nombre décimal : tous les entiers de la forme $10^p - 1$ avec p entier naturel supérieur ou égal à 1 conviennent.

II.

On note a et b deux entiers naturels compris entre 1 et 9.
On pose $N = \overline{abab}^{(10)}$ et $N' = \overline{baba}^{(10)}$.

1°) Écrire la décomposition en base dix de N. En déduire que N s'écrit sous la forme $N = 101 \times k$ où k est un entier naturel que l'on précisera en fonction de a et b.

$$N = 1000a + 100b + 10a + b$$

$$= 1010a + 101b$$

$$= 101(10a + b)$$

Comme a et b sont des entiers naturels, $10a + b$ est un entier naturel.

On a bien obtenu une écriture de N sous la forme $101k$ où k est un entier naturel.

2°) Justifier que $N + N' = (a+b) \times m$ où m est un entier naturel indépendant de a et b dont on donnera la valeur.

À la question précédente, on a obtenu $N = 1010a + 101b$.

De même, on démontre que $N' = 1010b + 101a$.

$$N + N' = 1010b + 101a + 1010a + 101b$$

$$= 1010(a+b) + 101(a+b)$$

$$= (a+b)(1010+101)$$

$$= 1111(a+b)$$

3°) Dans cette question, on prend $a = 2$ et $b = 3$. Déterminer l'écriture en base treize de N (en utilisant les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C).

$$N = \overline{1099}^{(13)}$$

On doit convertir le nombre $N = \overline{2323}^{(10)}$ en base treize.

On effectue des divisions euclidiennes successives.

$2323 = 13 \times 178 + 9$

$178 = 13 \times 13 + 9$

$13 = 13 \times 1 + 0$

$1 = 13 \times 0 + 1$

III.

1°) Écrire le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres de la colonne de gauche et justifier par un calcul dans la colonne de droite.

$a=\left(1-\mathrm{e}^{-\ln 3}\right)^2-2$	$\mathbb{Q}$	$a=\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 3}}\right)^2-2$ $=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2-2$ $=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-2$ $=\dfrac{4}{9}-2$ $=-\dfrac{14}{9}$
$b=\dfrac{\ln 4}{\ln\dfrac{1}{2}}$	$\mathbb{Z}$	$b=\dfrac{2\ln 2}{-\ln 2}$ $=-2$
$c=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\ln 3}\right)^{2020}}{\mathrm{e}^{\ln 2}-1}$	$\mathbb{N}$	$c=\dfrac{3^{2020}}{2-1}$ $=3^{2020}$
$d=\mathrm{i}\times(1+\mathrm{i})^2$	$\mathbb{Z}$	$d=\mathrm{i}\times(1+2\mathrm{i}-1)$ $=\mathrm{i}\times 2\mathrm{i}$ $=2\mathrm{i}^2$ $=-2$

On vérifie les résultats de a, b, c à l'aide de la calculatrice.

Pour le nombre a, la calculatrice permet d'obtenir $a=-1{,}55\underline{5}\dots$. Le chiffre 5 se répète indéfiniment.
On peut en déduire que a est un nombre rationnel.
La touche de conversion décimal / fractionnaire permet d'obtenir $a=-\dfrac{14}{9}$.

2°) Compléter par le symbole $\in$ ou $\notin$:

$$\mathrm{e}\notin\mathbb{Q}$$

Le nombre e est un nombre irrationnel. Il est même transcendant.
C'est l'un des nombres les plus importants en mathématiques, au même titre que le nombre π.

IV.

La numération sexagésimale (en base soixante) exigerait l'utilisation de soixante chiffres distincts !
En pratique, on décide d'écrire chacun de ces chiffres en utilisant le codage en base dix du nombre qu'il représente et en l'écrivant entre parenthèses.

Par exemple, $\overline{(2)(19)(51)}^{(60)}$ est l'écriture sexagésimale du nombre qui s'écrit 8391 en base dix :

$\overline{(2)(19)(51)}^{(60)}=2\times 3600+19\times 60+51$ soit $\overline{(2)(19)(51)}^{60}=8391$.

1°) Écrire en base dix le nombre A dont l'écriture sexagésimale est $\overline{(3)(0)(17)(48)}^{(60)}$.

$$\mathrm{A}=\overline{649068}^{(10)} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On décompose le nombre A en base 60 puis on effectue les calculs.

$\mathrm{A}=3\times 60^3+0\times 60^2+17\times 60^1+48\times 60^0$

2°) Déterminer l'écriture sexagésimale du nombre B qui s'écrit 54 325 432 en base dix.

$$\mathrm{B}=\overline{(4)(11)(30)(23)(52)}^{(60)} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On effectue des divisions euclidiennes successives de B par 60.

3°) Soit N un entier naturel dont l'écriture sexagésimale est $\overline{(ab)(ba)}^{(60)}$, a et b étant deux chiffres de notre système de numération en base dix tels que $1\leqslant a\leqslant 5$ et $1\leqslant b\leqslant 5$.
Exprimer N en fonction de a et b.

$\mathrm{N}=\overline{(ab)(ba)}^{(60)}$

$=\overline{ab}^{(10)}\times 60+\overline{ba}^{(10)}$

$=(10a+b)\times 60+(10b+a)$

$=600a+60b+10b+a$

$=601a+70b$

V.

1°) Calculer $z_1=\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}\times\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{\mathrm{i}}}$. On donnera le résultat sous forme algébrique.

$$z_1=\frac{1-2\mathrm{i}}{5} \quad \text{(une seule égalité)}$$

$$z_1=\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{2}{1+\mathrm{i}}\times\frac{1}{1-\frac{2}{\mathrm{i}}}$$

$$=-\mathrm{i}-\frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}\times\frac{1}{1+2\mathrm{i}}$$

$$=-\mathrm{i}-\frac{2(1-\mathrm{i})}{2}\times\frac{1-2\mathrm{i}}{5}$$

$$=-\mathrm{i}-(1-\mathrm{i})\times\frac{1-2\mathrm{i}}{5}$$

$$=-\mathrm{i}-\frac{(1-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{5}$$

$$=-\mathrm{i}-\frac{-1-3\mathrm{i}}{5}$$

$$=\frac{1-2\mathrm{i}}{5}$$

2°) On pose $z_2=\sqrt{\sqrt{2}+1}+\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}-1}$.
Calculer ${z_2}^2$.

${z_2}^2=2+2\mathrm{i}$ (une seule égalité)

$${z_2}^2=\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^2+2\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}+1}\times\sqrt{\sqrt{2}-1}-\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2$$

$$=\sqrt{2}+1+2\mathrm{i}\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}-\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$=\sqrt{2}+1+2\mathrm{i}\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}-\sqrt{2}+1$$

$$=2+2\mathrm{i}\sqrt{1}$$

$$=2+2\mathrm{i}$$

VI.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$\frac{z-1}{z+1}=\mathrm{i}$ (1) $\qquad$ $z^4+5z^2-36=0$ (2).

Écrire ci-dessous les ensembles de solutions respectifs S_1 et S_2 de (1) et (2) (une seule égalité à chaque fois) :

$S_1=\{\mathrm{i}\}$ $\qquad$ $S_2=\{2\,;-2\,;3\mathrm{i}\,;-3\mathrm{i}\}$

Écrire la résolution sur la copie.

$\frac{z-1}{z+1}=\mathrm{i}$ (1)

On résout (1) dans $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$.

$$(1)\Leftrightarrow z-1=\mathrm{i}(z+1)$$

$$\Leftrightarrow z-1=\mathrm{i}z+\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow (1-\mathrm{i})z=1+\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{(1+\mathrm{i})\times(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{(1+\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}^2}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{2\mathrm{i}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=\mathrm{i}$$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=\{\ \mathrm{i}\ \}$

$z^4+5z^2-36=0$ (2)

Il s'agit d'une équation bicarrée.

On pose $Z=z^2$ (changement d'inconnue).

L'équation (2) s'écrit : $Z^2+5Z-36=0$ (2').

Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels.

On calcule le discriminant $\Delta=169$.

(2') admet deux racines dans $\mathbb{C}$: $Z_1=4$ et $Z_2=-9$.

On reprend l'équation (2) en se rappelant que $Z=z^2$.

$(2) \Leftrightarrow z^2 = 4$ ou $z^2 = -9$

$\Leftrightarrow z = 2$ ou $z = -2$ ou $z = 3\text{i}$ ou $z = -3\text{i}$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2 = \{2\,;-2\,;3\text{i}\,;-3\text{i}\}$

On vérifie cet ensemble des solutions grâce à la calculatrice (commande de résolution des équations polynomiales).

VII.

Résoudre le système $\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2\text{i} \end{cases}$ d'inconnue $(z_1\,;z_2) \in \mathbb{C}^2$.

Écrire ci-dessous l'ensemble S des solutions (une seule égalité) :

$$S = \left\{\left(\text{i} - \sqrt{3}\,;\text{i}\sqrt{3} - 1\right)\right\}$$

Écrire la résolution sur la copie.

Résolvons dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 & (1) \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2\text{i} & (2) \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations.

Calculons son déterminant D.

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3} \times \left(-\sqrt{3}\right) - 1 \times (-1) = 1 - 3 = -2$$

$D \neq 0$ donc le système admet un unique couple solution dans $\mathbb{C}^2$.

On résout le système par combinaisons (on peut aussi utiliser la substitution, mais c'est plus maladroit).

Pour obtenir le couple solution, on utilise les multiplicateurs placés à droite du système :

$$\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2\text{i} \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times\sqrt{3} \\ \times(-1) \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{c} \times 1 \\ \times\left(-\sqrt{3}\right) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{pour annuler les } z_2 & \text{pour annuler les } z_1 \end{array}$$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1 = -2\sqrt{3} + 2\text{i} \\ 2z_2 = 2\text{i}\sqrt{3} - 2\text{i} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \text{i} - \sqrt{3} \\ z_2 = \text{i}\sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Le couple solution du système est $\left(\text{i} - \sqrt{3}\,;\text{i}\sqrt{3} - 1\right)$.

L'ensemble des solutions du système est $S = \left\{\left(\text{i} - \sqrt{3}\,;\text{i}\sqrt{3} - 1\right)\right\}$.

On effectue une vérification rapide.

Bonus : On considère l'ensemble $\text{A} = \{-3\,;-2\,;-1\,;1\,;2\,;3\}$.

Combien y a-t-il de couples $(a\,;b)$ d'éléments de A tels que le quotient $\dfrac{a}{b}$ soit un nombre rationnel non décimal ?

Écrire la liste de ces couples.

Il y a huit couples qui vérifient la condition : $(2\,;3)$, $(-2\,;-3)$, $(-1\,;-3)$, $(-1\,;3)$, $(1\,;-3)$, $(1\,;3)$, $(2\,;-3)$, $(-2\,;3)$.