T experts

Devoir pour le mardi 6 octobre 2020

Écrire très lisiblement, sans faire de ratures et sans utiliser d'abréviations.
Utiliser un stylo à plume.

Note : …. / 20

Prénom : …………………………………… **Nom : …………………………………………………………**

I. On considère la proposition P : « Pour tout entier naturel n, $(\mathrm{i}+1)^n(\mathrm{i}-1)^n$ est un entier relatif ».
Écrire P en langage mathématique.

……………………………………………………………………………

Quelle est la valeur de vérité de P ? Justifier.

………

………

………

………

………

II. On note E l'ensemble des entiers naturels de la forme $4k+1$ où k est un entier naturel et F l'ensemble des carrés parfaits.
On considère une urne qui contient cent boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 100.
On tire une boule dans l'urne et on note son numéro.

1°) Quel est l'univers des possibles Ω de l'expérience aléatoire ?

………

………

2°) On note P la loi d'équiprobabilité sur Ω.
On considère les événements A : « Le numéro appartient à E » et B : « Le numéro appartient à F ».

Déterminer la probabilité de A sachant B et de B sachant A. On donnera les résultats sous forme décimale.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. Dans chaque cas, écrire 2020 comme combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs.
1[er] cas : $a=17$ et $b=5$; 2[e] cas : $a=-299$ et $b=2$; 3[e] cas : $a=21$ et $b=47$.
On écrira les trois égalités sans justifier (une égalité par ligne).

………

………

………

Corrigé du devoir pour le 6-10-2020

I. On considère la proposition P : « Pour tout entier naturel n, $(\mathrm{i}+1)^n(\mathrm{i}-1)^n$ est un entier relatif ».
Écrire P en langage mathématique.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (\mathrm{i}+1)^n(\mathrm{i}-1)^n \in \mathbb{Z}$$

Quelle est la valeur de vérité de P ? Justifier.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad (\mathrm{i}+1)^n(\mathrm{i}-1)^n &= \left[(\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}-1)\right]^n \\ &= \left(\mathrm{i}^2-1^2\right)^n \\ &= (-2)^n\end{aligned}$$

De manière évidente, $\forall n \in \mathbb{N} \quad (-2)^n \in \mathbb{Z}$.

Donc la proposition P est vraie.

II. On note E l'ensemble des entiers naturels de la forme $4k+1$ où k est un entier naturel et F l'ensemble des carrés parfaits.
On considère une urne qui contient cent boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 100.
On tire une boule dans l'urne et on note son numéro.

1°) Quel est l'univers des possibles Ω de l'expérience aléatoire ?

L'univers des possibles est l'ensemble des boules de l'urne.

On évite d'écrire $\Omega = [\![1\,;100]\!]$ pour ne pas commettre une confusion abusive entre les boules et leurs numéros.

2°) On note P la loi d'équiprobabilité sur Ω.
On considère les événements A : « Le numéro appartient à E » et B : « Le numéro appartient à F ».
Déterminer la probabilité de A sachant B et de B sachant A. On donnera les résultats sous forme décimale.

Comme P est une probabilité uniforme sur Ω, on peut calculer les probabilités conditionnelles de manière intuitive sans utiliser les formules de définition ($P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$ et $P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}$).

Les boules dont le numéro appartient à E sont les boules portant les numéros : 1 ; 5 ; 11 ; 15 ; 21 ; 25 ; 31 ; 35 ; 41 ; 45 ; 49, 51 ; 55 ; 61 ; 65 ; 71 ; 75 ; 81 ; 85 ; 91 ; 95.
Il y a 20 boules.

Les boules dont le numéro appartient à F sont les boules portant les numéros : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.
Il y a 10 boules.

• Calcul de $P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$:

Il y a 20 issues qui réalisent l'événement A parmi lesquelles 4 réalisent aussi l'événement B (boules portant les numéros 1, 25, 49, 81).
Ainsi, $P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \dfrac{4}{20} = 0,2$.

• Calcul de $P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$:

Il y a 10 issues qui réalisent l'événement B parmi lesquelles 5 réalisent aussi l'événement A (boules portant les numéros 1, 9, 25, 49, 81).
Ainsi, $P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \dfrac{5}{10} = 0,5$.

On observe aisément que $P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) \neq P(\mathrm{B})$. Les événements A et B ne sont donc pas indépendants pour P.

III. Dans chaque cas, écrire 2020 comme combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs.
1$^{\text{er}}$ cas : $a = 17$ et $b = 5$; 2$^{\text{e}}$ cas : $a = -299$ et $b = 2$; 3$^{\text{e}}$ cas : $a = 21$ et $b = 47$.
On écrira les trois égalités sans justifier (une égalité par ligne).

Il est inutile de se fatiguer dans les deux premiers cas. On peut prendre une combinaison linéaire dont l'un des coefficients vaut 0.

1$^{\text{er}}$ cas : $a = 17$ et $b = 5$

On peut observer que 2020 est un multiple de 5 : $2020 = 404 \times 5$.
Ainsi, $2020 = 17 \times 0 + 5 \times 404$.

Les coefficients sont 0 et 404 ; ce sont bien des entiers relatifs.

2$^{\text{e}}$ cas : $a = -299$ et $b = 2$

On peut observer que 2020 est un multiple de 2 : $2020 = 1010 \times 2$.
Ainsi, $2020 = -299 \times 0 + 2 \times 1010$.

Les coefficients sont 0 et 1010 ; ce sont bien des entiers relatifs.

3$^{\text{e}}$ cas : $a = 21$ et $b = 47$

$$2020 = 21 \times (-29) + 47 \times 47$$

Dans ce cas, on cherche des entiers relatifs u et v tels que $21u + 47v = 2020$.
Cette égalité est équivalente à $v = \dfrac{2020 - 21u}{47}$.
On « rentre » dans la calculatrice la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2020 - 21x}{47}$.
L'examen d'un tableau avec des valeurs entières de x permet de trouver des coefficients répondant à la question.

On peut aussi exprimer u en fonction de v.