T spé — Exercices sur la fonction exponentielle (1)

1 Simplifier les expressions suivantes :

$A=e^0\times e^2$; $B=e\times e^{-1}$; $C=e^5\times e^2$; $D=e^{-2}\times\dfrac{e^5}{e^{-3}}$; $E=e^3\times\left(e^4-e^{-2}\right)$; $F=\left(e^{-4}\right)^3$; $G=\sqrt{e^{10}}$;.

$H=e^{3x-2}\times e^4$; $I=\dfrac{e^5}{e^{8x}}$.

Dans les deux dernières expressions, x est un réel quelconque.

> Vérifier les résultats obtenus pour les expressions H et I avec la calculatrice en utilisant l'astuce qui consiste à remplacer x par π.

2 Développer et simplifier les expressions suivantes :

$A=\left(e^x-1\right)\left(e^{-x}+3\right)$; $B=\left(e^x+1\right)\left(2-e^{-x}\right)$; $C=\left(e^x-3\right)^2$; $D=\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2$.

> Vérifier les résultats obtenus avec la calculatrice en utilisant l'astuce qui consiste à remplacer x par π.

3 Factoriser les expressions suivantes :

$A=3xe^x-5e^{2x}$ $\qquad B=e^{2x}+2e^x+1$ $\qquad C=e^{6x}-25$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$e^{-x}=1 \quad (1)$; $e^{4x-1}=1 \quad (2)$; $e^x=-2 \quad (3)$; $e^x=0 \quad (4)$; $e^{2x}+3e^x-4=0 \quad (5)$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$e^{-3x+4}<e^{x+2} \quad (1)$; $e^{-x}\geqslant 0 \quad (2)$; $e^{5x}<0 \quad (3)$; $e^{-x}>e \quad (4)$.

6 Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

a. $f:x\mapsto 3-2e^x$ b. $f:x\mapsto\dfrac{e^x}{5}$ c. $f:x\mapsto 3xe^x$ (factoriser le résultat) d. $f:x\mapsto\dfrac{e^x-1}{e^x+3}$ e. $f:x\mapsto\sqrt{4e^x+1}$

f. $f:x\mapsto 3-\dfrac{4}{e^x+1}$

7 On considère la fonction $f:x\mapsto(2x-1)e^x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ (donner le résultat sous forme factorisée).

2°) Faire le tableau de variations.

On admettra que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ et que $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$.

3°) Tracer $\mathcal{C}$ en prenant $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ orthogonal, 2 cm ou 2 « gros » carreaux pour unité sur l'axe des abscisses et 1 cm ou 1 « gros » carreau pour unité sur l'axe des ordonnées.

4°) Tracer la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.

8 On considère la fonction $f:x\mapsto\dfrac{e^x}{e^x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Faire le tableau de variations de f.

On admettra que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ et que $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$.

3°) Tracer $\mathcal{C}$ en prenant $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ orthogonal, 1 cm ou 1 « gros » carreau pour unité sur l'axe des abscisses et 4 cm ou 4 « gros » carreaux pour unité sur l'axe des ordonnées.

Préciser et tracer les asymptotes sur le graphique.

4°) Tracer la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.

5°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point A pour centre de symétrie.

9 Faire le tableau de signes des expressions suivantes.

$A=1-e^{-x}$; $B=e^{4x-1}-1$; $C=e^x-e^{-x}$; $D=e^{2x}-e^{x+1}$.

Indication : Pour déterminer le signe des expressions suivant les valeurs de x, résoudre une équation et deux inéquations à présenter dans trois colonnes côte à côte (pour A : $A>0 \quad (1)$; $A<0 \quad (2)$; $A=0 \quad (3)$).

10 Démontrer que, pour tout réel x, on a : $e^x\geqslant 1+x$ en étudiant les variations de la fonction $f:x\mapsto e^x-1-x$.

11 Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction f.

a. $f:x\mapsto 3e^{2x}$ b. $f:x\mapsto e^{1-3x}$ c. $f:x\mapsto 5e^{-x^2}$ d. $f:x\mapsto(x+1)e^{-x}$ (factoriser le résultat)

e. $f:x\mapsto\dfrac{4}{e^x+2e^{-x}}$ f. $f:x\mapsto x^2e^{2x}$ (factoriser le résultat) g. $f:x\mapsto 1-5e^{\frac{x}{2}}$ h. $f:x\mapsto\dfrac{e^{2x}}{x}$

i. $f:x\mapsto(3-x)e^{-x}$ (factoriser le résultat) j. $f:x\mapsto\left(e^{2x}-1\right)^5$ k. $f:x\mapsto\dfrac{3}{e^{2x}+4}$

12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$e^x=3 \quad (1)$; $e^{2x-1}=2 \quad (2)$; $e^{x+1}-e=1 \quad (3)$; $e^{2x}=e-1 \quad (4)$; $e^{x+1}-e^{x-1}=1 \quad (5)$; $e^{-x}=4 \quad (6)$.

On donnera les valeurs exactes.

Vérifier avec le site dcode.

13 Simplifier sans utiliser la calculatrice les expressions suivantes :

$A=4e^{2\ln 3}-e^{-\ln 3}$; $B=e^{3\ln 2-1}$; $C=e^{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}$

14 Vérifier que la fonction $F:x\mapsto 3-(x+1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $f:x\mapsto xe^{-x}$.

15 Vérifier que la fonction $f:x\mapsto 2e^{3x}-1$ est une solution de l'équation différentielle $y'-3y=3 \quad (E)$.

16 À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième des expressions suivantes :

$A=\dfrac{e^{-2}+\left(e^3\right)^2}{e^2}$; $B=e^2+\dfrac{\left(e^{-3}\right)^2+1}{e^2}$; $C=1-\dfrac{4}{e}$.

17 Démontrer que la fonction $f:x\mapsto 3+2e^{-x}$ est minorée sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{17bis}}$ Démontrer que la fonction $f : x \mapsto 2\mathrm{e}^{-x} - 1$ est minorée sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{18}}$ Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)^2 + 2$ est minorée sur $\mathbb{R}$.

Axe et centre de symétrie d'une courbe représentative de fonction

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

① Propriété 1 [centre de symétrie]

$\mathcal{C}$ admet le point $A(a\,;b)$ pour centre de symétrie lorsque $\forall h \in \mathbb{R} \quad f(a+h)+f(a-h)=2b$ (cf. formule des coordonnées d'un milieu).

Cas particulier :

$a=b=0$

Le point A est alors l'origine du repère.

$\mathcal{C}$ admet l'origine du repère pour centre de symétrie lorsque $\forall h \in \mathbb{R} \quad f(-h)=-f(h)$.

Une fonction qui vérifie cette propriété est appelée une fonction impaire. C'est le cas de la fonction de la fonction « cube » et plus généralement de toutes les fonctions puissances d'exposant entier naturel impair.

② Propriété 2 [axe de symétrie]

Si l'on se place dans un repère orthogonal du plan, $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $x=a$ pour axe de symétrie lorsque $\forall h \in \mathbb{R} \quad f(a+h)=f(a-h)$.

Cas particulier :

$a=0$

$\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie lorsque $\forall h \in \mathbb{R} \quad f(-h)=f(h)$.

Une fonction qui vérifie cette propriété est appelée une fonction paire. C'est le cas de la fonction « carré » et plus généralement de toutes les fonctions puissances d'exposant entier naturel pair.

Remarque :

Lorsque le domaine de définition $\mathcal{D}$ n'est pas $\mathbb{R}$, il faut regarder qu'il soit centré en a.

La condition est alors : « Pour tout réel h tel que $a+h \in \mathcal{D}$ … ».

C'est le cas de la fonction « inverse » définie sur $\mathbb{R}^*$ et qui est impaire.

Asymptotes horizontales et verticales

Le mot « asymptote » est formé de la racine grecque « symp » et du préfixe privatif « a ».
Le mot grec ancien correspondant est ἀσύμπτωτος, asúmptôtos (« qui ne s'affaisse pas », « qui ne s'écroule pas », « qui ne coïncide pas »).
Attention, contrairement à l'idée que pourrait induire l'étymologie, une courbe peut couper une asymptote en un ou plusieurs points voire une infinité de points.
Les asymptotes n'ont aucun rapport avec les tangentes.

① Asymptote horizontale

On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ (limite finie) [on lit « $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers + ∞ »].

La flèche $\longrightarrow$ (sans talon) est la flèche « tend vers » à ne pas confondre avec la flèche $\longmapsto$ (avec talon) qui est la flèche « a pour image ».

Dans ce cas, $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y=\ell$ pour asymptote horizontale en + ∞.

Idem si $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.

Exemples :

La courbe de la fonction « inverse » (hyperbole) admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en + ∞ et en – ∞.
La courbe de la fonction exponentielle admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en – ∞ mais pas d'asymptote horizontale en + ∞ (ni d'asymptote tout court).

D'autres images mentales peuvent être données avec l'exemple d'ondes avec amortissement (amplitude qui diminue). Dans ce cas, la courbe coupe une infinité de fois l'axe des abscisses.
On peut aussi penser dans un autre registre aux points qui représentent une suite géométrique dont la raison est comprise entre – 1 et 0.

② Asymptote verticale

On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$ (a désigne un réel).
Dans ce cas, $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x=a$ pour asymptote verticale.

Le résultat reste valable si l'on remplace $x \to a$ par $x \to a^+$ (x tend vers a par valeurs supérieures) ou $x \to a^-$ (x tend vers a par valeurs inférieures).

Exemple :

La courbe représentative de la fonction « inverse » (hyperbole) admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

Commentaires généraux :

Sur un graphique, tracer les asymptotes.

Il est parfois difficile de visualiser des asymptotes verticales sur calculatrice à cause du nombre de pixels limités.
On peut avoir l'impression que la courbe part d'un point alors qu'elle plonge au niveau de l'asymptote. C'est le cas de la courbe de la fonction inverse.

Les asymptotes concernent les branches infinies des courbes.
Par exemple, si une courbe admet une asymptote horizontale au voisinage de + ∞, on dit que cela concerne la partie de la courbe au voisinage de + ∞.

Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition [fonction majorée, minorée, bornée] à connaître par cœur

f est une fonction définie sur une partie *D* de $\mathbb{R}$.

• On dit que *f* est **majorée** sur *D* pour exprimer qu'il existe un réel *M* tel que $\forall x \in D \quad f(x) \leqslant M$ (*M* est un **majorant** de la fonction).

• On dit que *f* est **minorée** sur *D* pour exprimer qu'il existe un réel *m* tel que $\forall x \in D \quad f(x) \geqslant m$ (*m* est un **minorant** de la fonction).

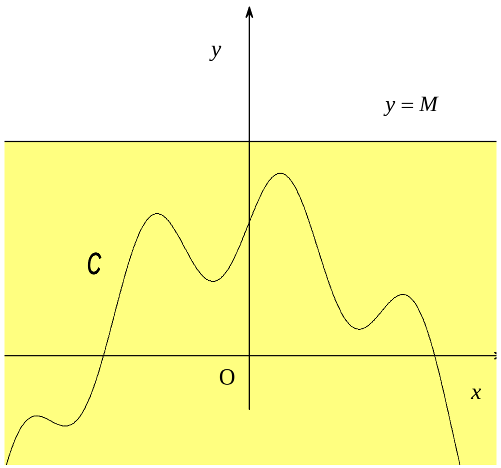
• On dit que *f* est **bornée** pour exprimer qu'elle est majorée et minorée, c'est-à-dire qu'il existe deux réels *m* et *M* tels que $\forall x \in D \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Une fonction est **bornée** lorsqu'elle est majorée et minorée.

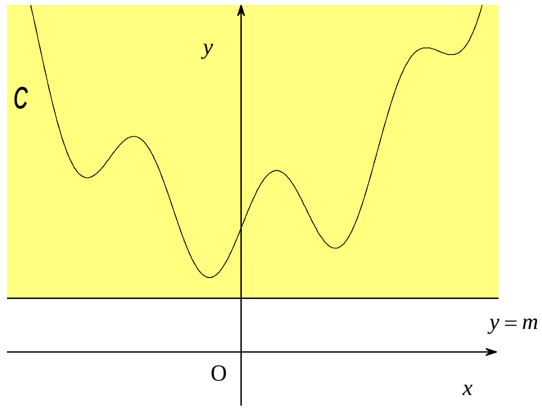
Graphiquement :

On retiendra les images mentales associées aux graphiques qui suivent.

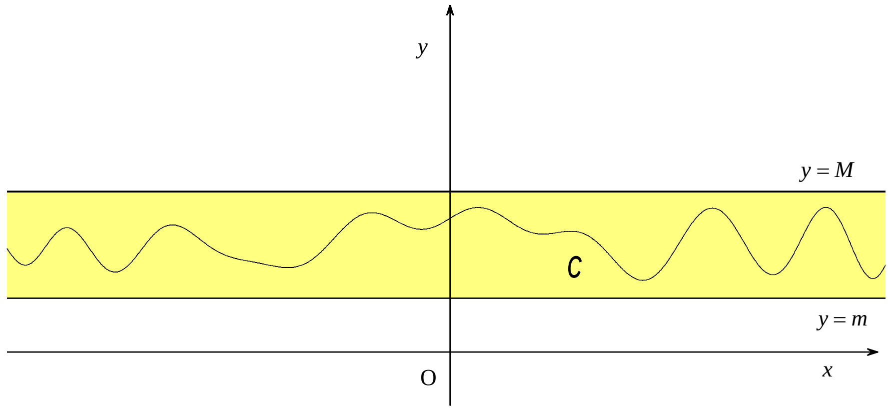
Dire qu'une fonction *f* est majorée par un réel *M* signifie que sa représentation graphique $\mathcal{C}$ dans un repère du plan est située dans le demi-plan situé au-dessous de la droite d'équation $y = M$ (frontière comprise).



Dire qu'une fonction *f* est minorée par un réel *m* signifie que sa représentation graphique $\mathcal{C}$ dans un repère du plan est située dans le demi-plan situé au-dessus de la droite d'équation $y = m$ (frontière comprise).



Dire qu'une fonction *f* est bornée entre deux réels *m* et *M* avec $m \leqslant M$ signifie que sa représentation graphique $\mathcal{C}$ dans un repère du plan est située dans la bande de plan limitée par les droites d'équations respectives $y = m$ et $y = M$.



Rappel définition d'une bande de plan :

On appelle bande de plan le domaine limité par deux droites parallèles du plan.

Le 1-10-2023

Propriété

- Si M est un majorant de f sur D, alors tout nombre supérieur ou égal à M est aussi un majorant de f sur D.
- Si m est un minorant de f sur D, alors tout nombre inférieur ou égal à m est aussi un minorant de f sur D.

Le 2-10-2023

Soit f une fonction définie sur un domaine D.

Définition 1 [maximum d'une fonction] :

On dit que f admet M pour maximum sur D (M étant un réel) lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :
C_1 : M est un majorant de f sur D (c'est-à-dire que $\forall x \in D \quad f(x) \leqslant M$) ;
C_2 : Il existe au moins un réel $a \in D$ tel que $f(a) = M$.

Graphique

Définition 2 [minimum d'une fonction] :

On dit que f admet m pour minimum sur D (m étant un réel) lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :
C_1 : m est un minorant de f sur D (c'est-à-dire que $\forall x \in D \quad f(x) \geqslant m$) ;
C_2 : Il existe au moins un réel $a \in D$ tel que $f(a) = m$.

Graphique

Le mercredi 18-9-2019

Majorer une promo : être le premier d'une promo (on parle du « major »).
Minorer une promo : être le dernier d'une promo.

Majoration d'amende, amende majorée.

Commandant major, tambour major qui a donné majorette.
Majorité, majoritaire
Minorité, minoritaire

majordome
Major : comparatif de « magnus » en latin qui veut dire grand.
Minor : comparatif de « parvus » en latin qui veut dire petit.

Le mot major se retrouve dans certaines langues « Plaza major ».
De même, les îles de Majorque et Minorque.
On le retrouve dans l'étymologie du mot « maire ».
On le retrouve aussi dans l'origine du nom de famille Mayeur.

Le 9 octobre 2022

magnus
magnat
magnitude
magnifique
magnificence
magnifier

magnum (énorme bouteille de champagne)

----
maximum superlatif de magnus
minimum superrltif de parvus

- maxime (prénom et nom commun féminin), maximal, maximum
- minime, minimal, minimiser

minus (en français) a donné le mot moins

Le 4 octobre 2022

Adjectif majeur / mineur qui ont donnés les noms majeur / mineur (un majeur, un mineur)
Le majeur désigne le doigt le plus long de la main.

notion de $\left|\begin{array}{l}\text{majorant}\\ \text{minorant}\end{array}\right.$ $\neq$ notion de $\left|\begin{array}{l}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{array}\right.$

Le 4 octobre 2022

majorant / minorant rapport avec les extremums

« majorée/minorée c'est avec les limites »

majorant
minorant

extremums sens de variation limites

Exemples :

1. La fonction « carré » est minorée sur $\mathbb{R}$ par 0 mais pas majorée.

2. La fonction $x \mapsto -x^2$ est majorée sur $\mathbb{R}$ par 0 mais pas minorée.

3. Les fonctions « cosinus » et « sinus » sont bornées sur $\mathbb{R}$ puisque toutes les valeurs sont comprises entre – 1 et 1.

4. La fonction « inverse » est minorée par 0 sur $]0\,;+\infty[$. 0 n'est pas atteint.

5. La fonction exponentielle est minorée par 0 mais n'est pas majorée (on ne peut pas dire qu'elle est majorée par $+\infty$).
Attention, 0 n'est pas un minimum car la fonction exponentielle n'atteint pas 0 (c'est une limite).
On peut dire également que – 1 est un minorant, que – 2 est un minorant, etc.
Toute valeur inférieure ou égale à 0 est un minorant de la fonction exponentielle.

majorer / minorer

majorée / minorée

majorant / minorant

Tracé des courbes à la main

→ obtention d'un tableau de valeurs sur calculatrice pour placer les points (valeurs approchées la plupart du temps)
→ tracé des tangentes importantes éventuelles (horizontales et verticales)
→ tracé des asymptotes éventuelles
→ soigner le tracé des branches infinies
→ tracé au critérium, si possible en une seule fois, en respectant les variations
→ comparaison avec la calculatrice

On trace toujours les tangentes horizontales.

Conventionnellement, les tangentes peuvent être tracées sous forme de doubles flèches.

Corrigé

$\boxed{1}$

$A=e^0\times e^2$ $=e^2$	$B=e\times e^{-1}$ $=1$	$C=e^5\times e^2$ $=e^7$	$D=e^{-2}\times\dfrac{e^5}{e^{-3}}$ $=e^6$	$E=e^3\times\left(e^4-e^{-2}\right)$ $=e^7-e^1$ $=e^7-e$ $(e^1=e)$	$F=\left(e^{-4}\right)^3$ $=e^{-12}$
$G=\sqrt{e^{10}}$ $=e^{\frac{10}{2}}$ $=e^5$	$H=e^{3x-2}\times e^4$ $=e^{3x+2}$	$I=\dfrac{e^5}{e^{8x}}$ $=e^{5-8x}$			

Pour E [on a au départ $E=e^3\left(e^4-e^{-2}\right)$], il n'est pas possible de réduire e^4-e^{-2} car il n'y a pas de formules pour e^a+e^b et e^a-e^b.

Pour G, on utilise la formule $G=\sqrt{e^a}=e^{\frac{a}{2}}$.

Une autre méthode pour G consiste à écrire $G=\sqrt{\left(e^5\right)^2}$ (la méthode est cependant un peu moins bien).

$$G=\sqrt{e^{10}}$$
$$=\sqrt{\left(e^5\right)^2}$$
$$=\left|\,e^5\,\right|$$
$$=e^5$$

Pour I, on peut aussi écrire : $I=\dfrac{1}{e^{8x-5}}$. Cette écriture est un peu moins intéressante ici.

$\boxed{2}$

$A=\left(e^x-1\right)\left(e^{-x}+3\right)$ $=e^0+3e^x-e^{-x}-3$ $=3e^x-e^{-x}-2$	$B=\left(e^x+1\right)\left(2-e^{-x}\right)$ $=2e^x-1+2-e^{-x}$ $=2e^x-e^{-x}+1$	$C=\left(e^x-3\right)^2$ $=e^{2x}-6e^x+9$

On s'arrête là. On ne peut pas aller plus loin.

Pour A et B, on pourrait avoir l'idée d'écrire $\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$.

L'idée n'est pas cependant pas très habile. Il vaut mieux ne pas modifier l'écriture de e^{-x}.
Pour le calcul de D, il y a deux méthodes.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On utilise les identités remarquables $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$ pour développer les deux carrés.

$$\mathrm{D}=\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^2-\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)^2$$

$$=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x}-\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x}\right)$$

$$=\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{0}\right)-\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-2\mathrm{e}^{0}\right)$$

$$=\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+2\right)-\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-2\right)$$

$$=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+2-\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}+2$$

$$=\cancel{\mathrm{e}^{2x}}+\cancel{\mathrm{e}^{-2x}}+2-\cancel{\mathrm{e}^{2x}}-\cancel{\mathrm{e}^{-2x}}+2$$

$$=4$$

2$^{\text{e}}$ méthode :

On utilise l'identité remarquable a^2-b^2 pour factoriser.

$$\mathrm{D}=\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^2-\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)^2$$

$$=\left[\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)+\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\right]\left[\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)-\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\right]$$

$$=2\mathrm{e}^{x}\times 2\mathrm{e}^{-x}$$

$$=4\mathrm{e}^{x-x}$$

$$=4\mathrm{e}^{0}$$

$$=4$$

$\boxed{3}$

$$\mathrm{A}=3x\mathrm{e}^{x}-5\mathrm{e}^{2x}$$

$$=\mathrm{e}^{x}\left(3x-5\mathrm{e}^{x}\right)$$

$$\mathrm{B}=\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}+1$$

$$=\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^2$$

$$\mathrm{C}=\mathrm{e}^{6x}-25$$

$$=\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2-5^2$$

$$=\left(\mathrm{e}^{3x}+5\right)\left(\mathrm{e}^{3x}-5\right)$$

$\boxed{4}$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{-x}=1\quad(1)$.

$$(1)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{0}$$

$$\Leftrightarrow -x=0$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$S_1=\{0\}$$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{4x-1}=1\quad(2)$.

$$(2)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{4x-1}=\mathrm{e}^{0}$$

$$\Leftrightarrow 4x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2=\left\{\frac{1}{4}\right\}$$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{x}=-2\quad(3)$.

(3) n'est vérifié par aucun réel x.

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$$S_3=\varnothing$$

Le 28-9-2023

L'ensemble vide se note sous la forme d'un rond barré sans accolades.
La notation ne s'emploie que dans le cadre des ensembles.
On n'a pas le droit d'écrire $x=\varnothing$.
x est un nombre ; $\varnothing$ est un ensemble.
Un nombre ne peut pas être égal à un ensemble.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x}=0 \quad (4)$.

(4) n'est vérifié par aucun réel x.

Soit S_4 l'ensemble des solutions de (4).

$S_4=\varnothing$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x}+3e^{x}-4=0 \quad (5)$.

Pour résoudre l'équation (5), on observe d'abord qu'elle est équivalente à $\left(e^{x}\right)^{2}+3e^{x}-4=0$ puis on utilise le changement d'inconnue $\mathrm{X}=e^{x}$.

(5) s'écrit alors $\mathrm{X}^{2}+3\mathrm{X}-4=0 \quad (5')$.

$(5')$ est une équation du second degré d'inconnue X.

$(5') \Leftrightarrow \mathrm{X}=1$ ou $\mathrm{X}=-4$ (par racine évidente ou factorisation mentale ou calculatrice)

Or $\mathrm{X}=e^{x}$.

On reprend la résolution de (5).

$(5) \Leftrightarrow e^{x}=1$ ou $e^{x}=-4$ (impossible)

$\Leftrightarrow x=0$

Soit S_5 l'ensemble des solutions de (5).

$S_5=\{0\}$

$\boxed{\mathbf{5}}$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-3x+4}<e^{x+2} \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow -3x+4<x+2$

$\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-x}\geqslant 0 \quad (2)$.

(2) est vérifiée pour tout réel x.

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2=\mathbb{R}$

Le 28-9-2023

On n'utilise pas d'accolades.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{5x}<0 \quad (3)$.

(3) n'est vérifié par aucun réel x.

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$S_3=\varnothing$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-x}>e \quad (4)$.

$(4) \Leftrightarrow -x>1$

$\Leftrightarrow x<-1$

Soit S_4 l'ensemble des solutions de (4).

$S_4=\left]-\infty\,;-1\right[$

$\boxed{\mathbf{6}}$

On ne justifie pas la dérivée qui est à peu près évidente dans tous les cas.

a. $f : x \mapsto 3-2e^{x}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=-2e^{x}$

b. $f : x \mapsto \dfrac{e^{x}}{5}$

réécriture indispensable : $f(x)=\dfrac{1}{5}\times e^{x}$ permet d'utiliser la formule $(ku)'=ku'$ mieux que d'utiliser la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^{2}}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\dfrac{e^{x}}{5}$

On constate que $f'=f$ (la dérivée de la fonction f est égale à elle-même).

c. $f : x \mapsto 3x\mathrm{e}^x$

Mentalement, on effectue la réécriture : $f(x) = 3 \times \left(x\mathrm{e}^x \right)$. On applique deux formules en même temps.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3 \times \underbrace{\left(1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x\right)}$$

On garde le 3. On dérive $x \times \mathrm{e}^x$ avec la formule de dérivée d'un produit.

$$= 3\left(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x\right)$$

$= 3\mathrm{e}^x(1+x)$ On factorise par e^x.

d. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 3}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times \left(\mathrm{e}^x + 3\right) - \mathrm{e}^x \times \left(\mathrm{e}^x - 1\right)}{\left(\mathrm{e}^x + 3\right)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x} + 3 \times \mathrm{e}^x - \cancel{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 3\right)^2}$$

$$= \frac{4\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 3\right)^2}$$

$$= \frac{4\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 3\right)^2}$$

On ne développe jamais les dénominateurs de dérivées.

e. $f : x \mapsto \sqrt{4\mathrm{e}^x + 1}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x}{2\sqrt{4\mathrm{e}^x + 1}}$ (formule $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$)

$$= \frac{2\mathrm{e}^x}{\sqrt{4\mathrm{e}^x + 1}}$$

f. $f : x \mapsto 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$

réécriture indispensable : $f(x) = 3 - 4 \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 0 - 4 \times \left(- \frac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2} \right)$$

$$= \frac{4\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2}$$

$\boxed{7}$

$f : x \mapsto (2x-1)\mathrm{e}^x$

1°) *f* est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^x + (2x-1) \times \mathrm{e}^x$ [formule de dérivation d'un produit]

$= \mathrm{e}^x\left[2 + (2x-1)\right]$ [on factorise ; on ne développe surtout pas, ce serait une perte de temps]

$$= (2x+1)\mathrm{e}^x$$

2°)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$	
Signe de e^x		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de *f*	0	$\searrow$	$-\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule le minimum global qui apparaît dans le tableau.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

$= -\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ ($\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ ou propriété 5 puis propriété 2 : $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^{-1}} = \sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{e}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$)

On peut dire que *f* admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ atteint en $-\dfrac{1}{2}$. Ce minimum est égal à $-\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

On complète avec les limites données dans l'énoncé : $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et que $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.

3°) On respecte les consignes : repère orthogonal, 2 cm ou 2 « gros » carreaux pour unité sur l'axe des abscisses et 1 cm ou 1 « gros » carreau pour unité sur l'axe des ordonnées.

Comme la limite de *f* en $-\infty$ est égale à 0 (donné dans l'énoncé), la courbe $\mathcal{C}$ vient « longer » l'axe des abscisses en $-\infty$.

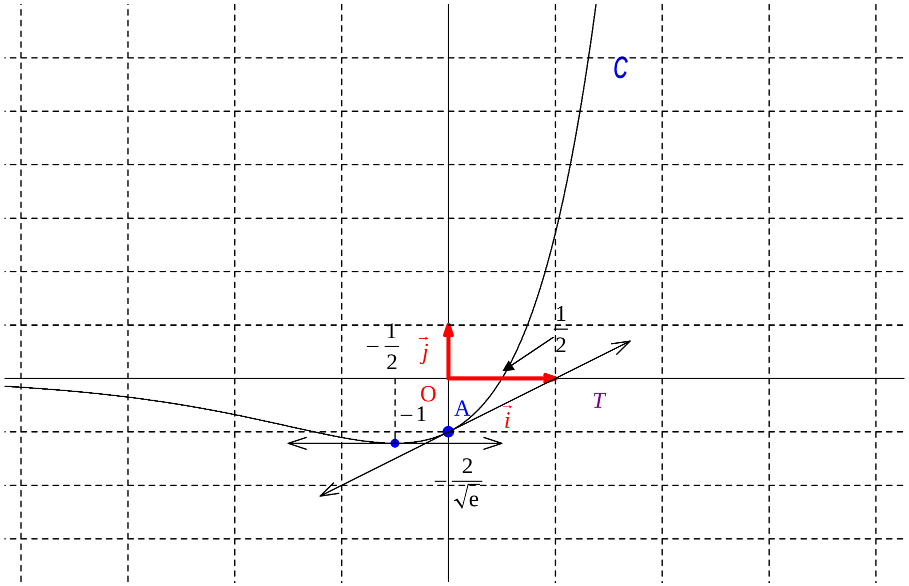
La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Pour déterminer les points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses, ont résout l'équation $f(x)=0$.

$f(-1)=-\frac{3}{e}=-1,10363832...$

$f(-2)=-\frac{5}{e^2}=-0,676676...$

$f(-3)=-\frac{7}{e^3}=-0,348509...$



On commence par placer le point correspondant au minimum global et on trace la tangente horizontale en ce point avec la convention usuelle de tracé d'une tangente.

On a $-\frac{2}{\sqrt{e}}=-1,21...$.

On place quelques points.

$f(0)=-1$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$; $f(-1)=-\frac{3}{e}$; $f(1)=e$ (point intéressant)

Comme $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$, $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y=0$ c'est-à-dire l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$.

4°) Pour le tracé de la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0, il suffit de calculer le coefficient directeur.

Pour tracer *T*, on a besoin de son coefficient directeur.

On a $f'(0)=(2\times0+1)\times e^0=1\times1=1$.

Le coefficient directeur de *T* est donc égal à 1 d'où le tracé très facile (en avançant de 1 on doit « monter » de 1).

$\boxed{8}$

$f : x\mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$

$\mathcal{C}$: courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

La fonction *f* n'est pas une fonction rationnelle.

1°)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, celle du dénominateur ne s'annulant pas.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\frac{e^x\times(1+e^x)-e^x\times e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$=\frac{e^x+\cancel{e^{2x}}-\cancel{e^{2x}}}{(1+e^x)^2}$$

$$=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

2°) $\forall x\in\mathbb{R}\quad e^x>0$ et $(1+e^x)^2>0$ donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)>0$.

On en déduit que *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	
Variations de *f*	0	↗	1

On complète avec les limites données dans l'énoncé.

D'après le tableau de variations avec les limites, on peut dire que la fonction *f* est à valeurs dans l'intervalle $]0;1[$.

Mieux, on peut écrire $f(\mathbb{R})=]0;1[$.

3°)

On effectue un petit tableau de valeurs, très facile à faire avec la calculatrice.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,007	0,018	0,047	0,1	0,27	0,5	0,73	0,88	0,95	0,98	0,99

valeur approchée (sauf pour l'image de 0)

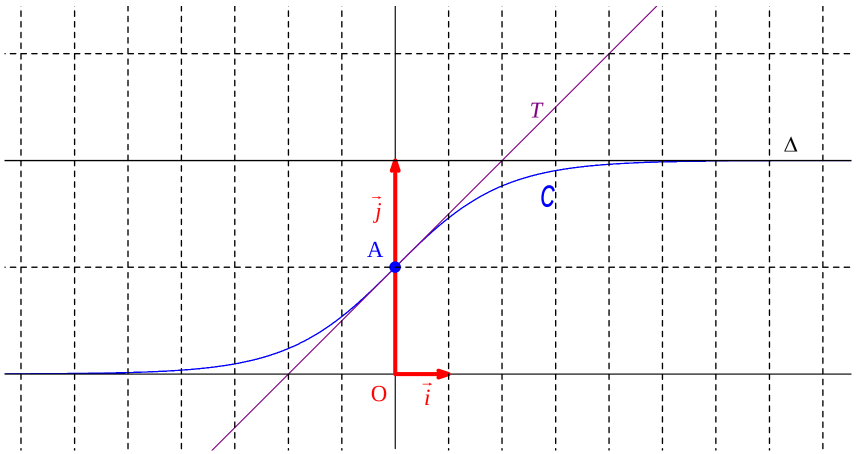
$f(0,25)=0,24...$
$f(0,5)=0,23...$

La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $\mathrm{A}\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$.

Comme $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$, $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.
Comme $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$, $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y=0$ c'est-à-dire l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$.

On trace la droite Δ d'équation $y=1$.

On place les points du tableau de valeurs sur le graphique.



On vérifie à l'aide de la calculatrice graphique en tapant $\mathrm{e}^x/\left(\mathrm{e}^x+1\right)$.

4°)

On commence par calculer $f'(0)$.

$f'(0)=\dfrac{\mathrm{e}^0}{\left(\mathrm{e}^0+1\right)^2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$ donc la tangente T a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{4}$.

Pour le tracé, on peut dire que le vecteur $\vec{u}\left(1\,;\frac{1}{4}\right)$ est un vecteur directeur de T.

Rappel de propriété :

> Soit D une droite du plan muni d'un repère de coefficient directeur m.
> Le vecteur $\vec{u}(1\,;m)$ est un vecteur directeur de D.

Il est plus facile de représenter le vecteur $4\vec{u}(4\,;1)$ (on « avance » de 4 unités vers la droite et on « monte » d'1 unité vers le haut).

On peut démontrer que $\mathcal{C}$ est en dessous de T sur $]-\infty\,;0[$ et au-dessus de T sur $]0\,;+\infty[$.
On dit que le point A est un **point d'inflexion** de la courbe $\mathcal{C}$ et que T est une **tangente d'inflexion**.

5°) On sait que $\mathrm{A}\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$. On applique la propriété du centre de symétrie d'une courbe avec $a=0$ et $b=\frac{1}{2}$.

On va donc démontrer $\forall h\in\mathbb{R}\quad f(h)+f(-h)=2\times\frac{1}{2}$ soit $\forall h\in\mathbb{R}\quad f(h)+f(-h)=1$.

On pose $\forall h\in\mathbb{R}\quad g(h)=f(h)+f(-h)$.

1ère méthode :

$$\forall h\in\mathbb{R}\quad g(h)=\frac{\mathrm{e}^h}{\mathrm{e}^h+1}+\frac{\mathrm{e}^{-h}}{\mathrm{e}^{-h}+1}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^h}{\mathrm{e}^h+1}+\frac{\frac{1}{\mathrm{e}^h}}{\frac{1}{\mathrm{e}^h}+1}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^h}{\mathrm{e}^h+1}+\frac{\frac{1}{\mathrm{e}^h}}{\frac{1+\mathrm{e}^h}{\mathrm{e}^h}}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^h}{\mathrm{e}^h+1}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^h}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^h+1}{\mathrm{e}^h+1}$$

$$=1$$

2^e^ méthode (un peu moins astucieuse, mais possible) :

$$\forall h\in\mathbb{R}\quad g(h)=\frac{\mathrm{e}^{h}}{\mathrm{e}^{h}+1}+\frac{\mathrm{e}^{-h}}{\mathrm{e}^{-h}+1}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{h}\left(\mathrm{e}^{-h}+1\right)+\mathrm{e}^{-h}\left(\mathrm{e}^{h}+1\right)}{\left(\mathrm{e}^{h}+1\right)\left(\mathrm{e}^{-h}+1\right)}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{0}+\mathrm{e}^{h}+\mathrm{e}^{0}+\mathrm{e}^{-h}}{\mathrm{e}^{0}+\mathrm{e}^{h}+\mathrm{e}^{-h}+1}$$

$$=\frac{2+\mathrm{e}^{h}+\mathrm{e}^{-h}}{2+\mathrm{e}^{h}+\mathrm{e}^{-h}}$$

$$=1$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet le point A pour centre de symétrie.

$\boxed{9}$ Démonstration d'une inégalité à l'aide d'une fonction auxiliaire

Démontrons que $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^{x}\geqslant 1+x$.

Étudions les variations de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x}-1-x$ (on notera que l'expression $\mathrm{e}^{x}-1-x$ correspond à « membre de gauche – membre de droite »).

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\mathrm{e}^{x}-1$ (on n'écrit pas $f'(x)=\mathrm{e}^{x}-0-1$ de manière à aller un peu plus vite).

► Pour étudier le signe de $f'(x)$, on résout une équation et deux inéquations.

$f'(x)>0\quad(1)$	$f'(x)<0\quad(2)$	$f'(x)=0\quad(3)$
$(1)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}-1>0$	$(2)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}-1<0$	$(3)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}-1=0$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}>1$	$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}<1$	$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}=1$
$\Leftrightarrow x>0$	$\Leftrightarrow x<0$	$\Leftrightarrow x=0$

► On peut aussi utiliser directement le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{e}^{0}=1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de *f*		↘	0	↗	

On calcule le minimum global $f(0)=\mathrm{e}^{0}-0-1=1-1=0$.

Les limites n'ont pas d'intérêt ici.

1^ère^ façon pour terminer :

D'après le tableau de variations, *f* admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ égal à 0 obtenu pour $x=0$.

On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)\geqslant 0$.

Autrement dit, $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^{x}-1-x\geqslant 0$ d'où $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^{x}\geqslant 1+x$.

2^e^ façon pour terminer :

D'après le tableau de variations, *f* est à valeurs positives ou nulles sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)\geqslant 0$.

Autrement dit, $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^{x}-1-x\geqslant 0$ d'où $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^{x}\geqslant 1+x$.

Remarques :

1. Rédaction

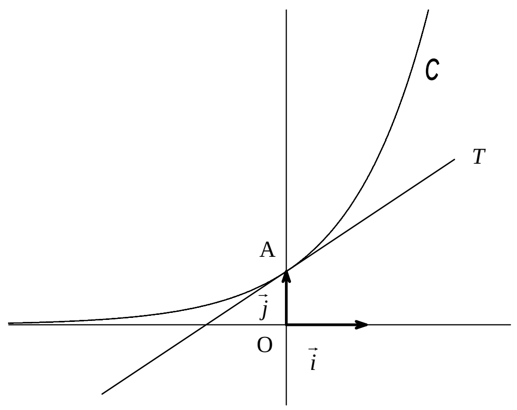
Pour parler du minimum ou du maximum d'une fonction, on peut s'exprimer de plusieurs manières.

On peut dire que « *f* admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ égal à 0 obtenu (ou atteint) pour $x=0$ » ou que « 0 est le minimum global de *f* sur $\mathbb{R}$ obtenu (ou atteint) pour $x=0$ ».

2. Cette inégalité traduit que la courbe de la fonction exponentielle est située au-dessus de la tangente au point d'abscisse 0.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le plan muni d'un repère.

La tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y=x+1$.



L'inégalité $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^{x}\geqslant x+1$ traduit le fait que $\mathcal{C}$ est au-dessus de T.

Il s’agit d’une inégalité fondamentale sur l’exponentielle d’un réel.

10

On applique la formule $\left(e^{u}\right)'=u'e^{u}$ où u est une fonction dérivable.

Voir cours « La fonction exponentielle (2) » paragraphe **IV**.

a. $f : x \mapsto 3e^{2x}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=3\times 2e^{2x}=6e^{2x}$

b. $f : x \mapsto e^{1-3x}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=-3e^{1-3x}$

c. $f : x \mapsto 5e^{-x^2}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=5\times\left(-2xe^{-x^2}\right)$

$=-10xe^{-x^2}$

d. $f : x \mapsto (x+1)e^{-x}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=1\times e^{-x}+(x+1)\left(-e^{-x}\right)$ (formule de dérivation d’un produit)

$=e^{-x}-(x+1)e^{-x}$

$=\left[1-(x+1)\right]e^{-x}$ (on factorise tout de suite)

$=-xe^{-x}$

e. $f : x \mapsto \dfrac{4}{e^{x}+2e^{-x}}$

On effectue la réécriture $f(x)=4\times\dfrac{1}{e^{x}+2e^{-x}}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=4\times\left(-\dfrac{e^{x}-2e^{-x}}{\left(e^{x}+2e^{-x}\right)^2}\right)$

$=-4\times\dfrac{e^{x}-2e^{-x}}{\left(e^{x}+2e^{-x}\right)^2}$

$=4\times\dfrac{2e^{-x}-e^{x}}{\left(e^{x}+2e^{-x}\right)^2}$ (étape facultative)

f. $f : x \mapsto x^2e^{2x}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=2x\times e^{2x}+x^2\times 2e^{2x}$

$=2x(1+x)e^{2x}$

g. $f : x \mapsto 1-5e^{\frac{x}{2}}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=0-5\times\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ (on observe que $e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{1}{2}x}$)

$=-\dfrac{5}{2}e^{\frac{x}{2}}$

On sait que $e^{\frac{x}{2}}=\sqrt{e^{x}}$ mais cela n’a pas d’intérêt ici.

h. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{x}$

$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f'(x)=\dfrac{2e^{2x}\times x-e^{2x}\times 1}{x^2}$

$=\dfrac{(2x-1)\times e^{2x}}{x^2}$

i. $f : x \mapsto (3-x)e^{-x}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=-1\times e^{-x}+(3-x)\left(-e^{-x}\right)$

$=-e^{-x}+(x-3)e^{-x}$

$=(x-4)e^{-x}$

j. $f : x \mapsto \left(e^{2x}-1\right)^5$

On applique la formule de dérivation $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 5\times 2e^{2x}\times\left(e^{2x}-1\right)^4$$

$$= 10e^{2x}\times\left(e^{2x}-1\right)^4$$

k. $f : x \mapsto \dfrac{3}{e^{2x}+4}$

On effectue la réécriture $f(x) = 3\times\dfrac{1}{e^{2x}+4}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3\times\left(-\frac{2e^{2x}}{\left(e^{2x}+4\right)^2}\right)$$

$$= -\frac{6e^{2x}}{\left(e^{2x}+4\right)^2}$$

11

On utilise une technique qui peut s'appliquer à des expressions plus simples telles que les expressions affines de la forme $ax+b$, a et b étant deux réels, étudiées en 2e.

• $A = 1-e^{-x}$

On a une expression dont le signe ne saute pas directement aux yeux et qui, a priori, varie selon les valeurs de x.

$A > 0 \quad (1)$	$A < 0 \quad (2)$	$A = 0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow 1-e^{-x} > 0$	$(2) \Leftrightarrow 1-e^{-x} < 0$	$(3) \Leftrightarrow 1-e^{-x} = 0$
$\Leftrightarrow e^{-x} < 1$	$\Leftrightarrow e^{-x} > 1$	$\Leftrightarrow e^{-x} = 1$
$\Leftrightarrow -x < 0$	$\Leftrightarrow -x > 0$	$\Leftrightarrow -x = 0$
$\Leftrightarrow x > 0$	$\Leftrightarrow x < 0$	$\Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de A		–	0	+	

On peut vérifier le résultat grâce à la calculatrice en traçant la représentation graphique de la fonction $x \mapsto 1-e^{-x}$.

• $B = e^{4x-1}-1$

$B > 0 \quad (1)$	$B < 0 \quad (2)$	$B = 0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow e^{4x-1}-1 > 0$	$(2) \Leftrightarrow e^{4x-1}-1 < 0$	$(3) \Leftrightarrow e^{4x-1}-1 = 0$
$\Leftrightarrow e^{4x-1} > 1$	$\Leftrightarrow e^{4x-1} < 1$	$\Leftrightarrow 4x-1 = 0$
$\Leftrightarrow 4x-1 > 0$	$\Leftrightarrow 4x-1 < 0$	$\Leftrightarrow 4x-1 = 0$
$\Leftrightarrow x > \dfrac{1}{4}$	$\Leftrightarrow x < \dfrac{1}{4}$	$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de B		–	0	+	

On peut vérifier le résultat grâce à la calculatrice en traçant la représentation graphique de la fonction $x \mapsto e^{4x-1}-1$.

• $C = e^{x}-e^{-x}$

$C > 0 \quad (1)$	$C < 0 \quad (2)$	$C = 0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow e^{x}-e^{-x} > 0$	$(2) \Leftrightarrow e^{x}-e^{-x} < 0$	$(3) \Leftrightarrow e^{x}-e^{-x} = 0$
$\Leftrightarrow e^{x} > e^{-x}$	$\Leftrightarrow e^{x} < e^{-x}$	$\Leftrightarrow e^{x} = e^{-x}$
$\Leftrightarrow x > -x$	$\Leftrightarrow x < -x$	$\Leftrightarrow x = -x$
$\Leftrightarrow 2x > 0$	$\Leftrightarrow 2x < 0$	$\Leftrightarrow 2x = 0$
$\Leftrightarrow x > 0$	$\Leftrightarrow x < 0$	$\Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de C		–	0	+	

On peut vérifier le résultat grâce à la calculatrice en traçant la représentation graphique de la fonction $x \mapsto e^{x}-e^{-x}$.

• $\mathrm{D}=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x+1}$

$\mathrm{D}>0 \quad (1)$	$\mathrm{D}<0 \quad (2)$	$\mathrm{D}=0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x+1}>0$	$(2) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x+1}<0$	$(3) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x+1}=0$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}>\mathrm{e}^{x+1}$	$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}<\mathrm{e}^{x+1}$	$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{x+1}$
$\Leftrightarrow 2x>x+1$	$\Leftrightarrow 2x<x+1$	$\Leftrightarrow 2x=x+1$
$\Leftrightarrow x>1$	$\Leftrightarrow x<1$	$\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de D		$-$	0	$+$	

On peut vérifier le résultat grâce à la calculatrice en traçant la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x+1}$.

12

Résolution de l'équation $\mathrm{e}^{x}=a \quad (1)$ (a : réel donné).

On note S l'ensemble des solutions de cette équation.

1$^{\text{er}}$ cas : $a>0 \quad S=\{\ln a\}$
2$^{\text{e}}$ cas : $a\leqslant 0 \quad S=\varnothing$

L'encadré doit être parfaitement su.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{x}=3 \quad (1)$.

On applique directement la propriété de l'encadré car 3 est un réel strictement positif.

$(1) \Leftrightarrow x=\ln 3$ (valeur exacte ; on s'arrête là)

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1=\{\ln 3\}$

On vérifie avec le site dcode.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{2x-1}=2 \quad (2)$.

$(2) \Leftrightarrow 2x-1=\ln 2$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\ln 2}{2}$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2=\left\{\dfrac{1+\ln 2}{2}\right\}$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}=1 \quad (3)$.

$(3) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+1}=\mathrm{e}+1$ (il est inutile d'écrire $\mathrm{e}+1=\mathrm{e}^1+\mathrm{e}^0$ car on ne peut rien faire avec une somme d'exponentielles)

$\Leftrightarrow x+1=\ln(\mathrm{e}+1)$ car $\mathrm{e}+1>0$

$\Leftrightarrow x=\ln(\mathrm{e}+1)-1$ (on ne peut pas transformer $\ln(\mathrm{e}+1)$; éventuellement on peut utiliser $\ln \mathrm{e}=1$ ce qui donne $x=\ln(\mathrm{e}+1)-\ln \mathrm{e}=\ln\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}$)

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$S_3=\{\ln(\mathrm{e}+1)-1\}$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}-1 \quad (4)$.

$(4) \Leftrightarrow 2x=\ln(\mathrm{e}-1)$ car $\mathrm{e}-1>0$ (important à vérifier avant d'utiliser le logarithme népérien)

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\ln(\mathrm{e}-1)}{2}$

Soit S_4 l'ensemble des solutions de (4).

$S_4=\left\{\dfrac{\ln(\mathrm{e}-1)}{2}\right\}$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}^{x-1}=1 \quad (5)$.

$(5) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}-\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-1}=1$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\right)=1$ ou $\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}-\mathrm{e}^{x}\times\dfrac{1}{\mathrm{e}}=1$ ce qui donne $\left(\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{x}=1$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}$

$\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}$ car $\dfrac{1}{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}>0$ ou $x=\ln\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2-1}$

$\Leftrightarrow x=-\ln\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\right)$ (propriété sur le logarithme népérien)

Soit S_5 l'ensemble des solutions de (5).

$S_5=\left\{-\ln\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\right)\right\}$

Autre technique de mise en facteur :

$(5) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+1}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)=1$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+1}=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-2}}$

$\Leftrightarrow x+1=\ln\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-2}}$ car $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-2}}>0$

$\Leftrightarrow x+1=\ln\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-2}}$

$\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-2}}-1$

En utilisant les propriétés de la fonction logarithme népérien, on peut démontrer que $\ln\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-2}}-1=-\ln\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\right)$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{-x}=4 \quad (6)$.

$(6) \Leftrightarrow -x=\ln 4$

$\Leftrightarrow x=-\ln 4$

Soit S_6 l'ensemble des solutions de (6).

$S_6=\{-\ln 4\}$

Nous verrons plus tard dans le chapitre sur le logarithme népérien que $-\ln 4=\ln\dfrac{1}{4}$.

13

$A=4\mathrm{e}^{2\ln 3}-\mathrm{e}^{-\ln 3}$

$=4\left(\mathrm{e}^{\ln 3}\right)^2-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 3}}$

$=4\times 3^2-\dfrac{1}{3}$

$=36-\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{107}{3}$

$B=\mathrm{e}^{3\ln 2-1}$

$=\mathrm{e}^{3\ln 2}\times\mathrm{e}^{-1}$

$=\left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^3\times\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$=2^3\times\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$=\dfrac{8}{\mathrm{e}}$

$C=\mathrm{e}^{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}$

$=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

On pourrait s'arrêter là mais il est préférable dans ce cas simple de faire en sorte de ne plus avoir de racine carrée au dénominateur.
On va utiliser la technique de la quantité conjuguée : on multiplie haut et bas par la quantité conjuguée du dénominateur.

$=\dfrac{1\times\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\times\left(\sqrt{2}-1\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1}$

$=\sqrt{2}-1$

14

Vérifions que la fonction $\mathrm{F}: x \mapsto 3-(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction $f: x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$.

On doit démontrer que la dérivée de F est égale à f.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x)=0-\left[1\times\mathrm{e}^{-x}+(x+1)\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\right]$ (le 0 est facultatif, on peut l'omettre ; dans ce cas, on ne met pas de crochets)

$=-\left[1-(x+1)\right]\mathrm{e}^{-x}$

$=x\mathrm{e}^{-x}$

$=f(x)$

On en déduit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

15

Vérifions que la fonction $f : x \mapsto 2e^{3x} - 1$ est une solution de l'équation différentielle $y' - 3y = 3 \quad (\text{E})$.

$y' - 3y = 3 \quad (\text{E})$

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6e^{3x}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - 3f(x) = 6e^{3x} - 3 \times \left(2e^{3x} - 1\right)$$
$$= 3$$

Donc la fonction f est une solution particulière de (E).

16

$$A = \frac{e^{-2} + \left(e^3\right)^2}{e^2} \qquad B = e^2 + \frac{\left(e^{-3}\right)^2 + 1}{e^2} \qquad C = 1 - \frac{4}{e}$$

On peut directement taper les expressions sans les transformer.

Pour C, on tape $1 - \dfrac{4}{e^1}$ ou directement l'expression si la calculatrice est mise à jour.

Avec la calculatrice Numworks, on obtient les affichages suivants :

$A \approx 54,616465672013$; $B \approx 7,5247268447952$; $C \approx -0,4715177647$

Réponses à écrire :

- La valeur arrondie au millième de A est donc 54,616.
- La valeur arrondie au millième de B est donc 7,525.
- La valeur arrondie au millième de C est donc – 0,472.

Complément :

On peut transformer A et B en « simplifiant » les expressions. Ce n'est cependant pas demandé dans l'exercice.

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^{-2} + \left(e^3\right)^2}{e^2} \\ &= \frac{e^{-2} + e^6}{e^2} \\ &= \frac{e^{-2}}{e^2} + \frac{e^6}{e^2} \\ &= e^{-4} + e^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= e^2 + \frac{\left(e^{-3}\right)^2 + 1}{e^2} \\ &= e^2 + \frac{e^{-6} + 1}{e^2} \\ &= e^2 + \frac{e^{-6}}{e^2} + \frac{1}{e^2} \\ &= e^2 + e^{-6} + e^{-2} \end{aligned}$$

17

$f : x \mapsto 3 + 2e^{-x}$

Démontrons que f est minorée sur $\mathbb{R}$.

1ère méthode :

Ici, nous sommes dans un cas très simple où le signe de $f(x)$ saute aux yeux.
0 est un minorant « évident ».

$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2e^{-x} \geqslant 0$ et $3 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$.

On en déduit que f est minorée sur $\mathbb{R}$ et que 0 est un minorant de f sur $\mathbb{R}$.

On peut donner d'autres minorants tels que – 1, – 2, …

2e méthode : On procède par inégalités successives.

On part de $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} \geqslant 0$.

En multipliant les deux membres de cette inégalité par 2, on obtient $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2e^{-x} \geqslant 0$.

En ajoutant ensuite 3 aux deux membres de la dernière inégalité, on obtient $\forall x \in \mathbb{R} \quad 3 + 2e^{-x} \geqslant 3$ soit $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 3$.

On a donc démontré que f est minorée sur $\mathbb{R}$ et que 3 est un minorant de f sur $\mathbb{R}$.

On peut démontrer aisément que 3 n'est pas atteint.
Ce n'est pas un minimum.

17bis

$f : x \mapsto 2e^{-x} - 1$

Démontrons que f est minorée sur $\mathbb{R}$.

Il y a une seule méthode ici (pas de minorant qui saute aux yeux).

On procède par inégalités successives.

On part de $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2e^{-x} \geqslant 0$.

En ajoutant – 1 aux deux membres de cette inégalité, on obtient $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2e^{-x} - 1 \geqslant -1$ soit $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant -1$.

On a donc démontré que f est minorée sur $\mathbb{R}$ et que – 1 est un minorant de f sur $\mathbb{R}$.

On peut démontrer aisément que – 1 n'est pas atteint.
Ce n'est pas un minimum.