T experts

Devoir pour le mardi 29 septembre 2020

Écrire très lisiblement, sans ratures et sans utiliser d'abréviations.
Utiliser un stylo à plume.

Note : …. / 20

Prénom : ………………………………… **Nom : ……………………………………………………**

I. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le chiffre des unités de l'écriture en base dix de 3^n.
À l'aide des premiers termes, que peut-on conjecturer pour la périodicité de la suite (u_n) ?
On répondra par une phrase rédigée selon le modèle suivant à recopier et compléter sur les lignes ci-dessous :
« D'après les premiers termes, on peut conjecturer que la suite (u_n) est … ».

………

………

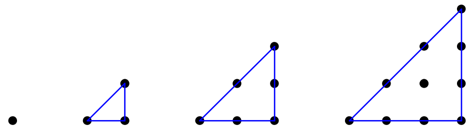
On admet que la conjecture est vraie. Quel est le chiffre des unités de l'écriture en base dix de 3^{2020} ?

……. (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

Vérifier le résultat en calculant en utilisant la console Python comme calculatrice.

Syntaxe pour les puissances en Python : ** donc ici on tapera 3**2020.

II. Les figures ci-dessous décrivent le procédé de construction des « nombres triangulaires », générant ainsi une suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$. Cette suite est connue depuis l'Antiquité par les mathématiciens grecs qui s'y sont intéressés.



1 point 3 points 6 points 10 points

$t_1 = 1$ $t_2 = 3$ $t_3 = 6$ $t_4 = 10$

1°) Calculer $t_1 + t_2$, $t_2 + t_3$, $t_3 + t_4$, $t_4 + t_5$ etc.
Qu'observe-t-on à chaque fois ? Que peut-on conjecturer ?

………

………

………

………

………

………

2°) Déterminer, en justifiant, une expression simplifiée de t_n en fonction de n.

………

………

………

3°) Démontrer la conjecture émise au 1°).

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du devoir pour le 29-9-2020

I. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le chiffre des unités de l'écriture en base dix de 3^n.
À l'aide des premiers termes, que peut-on conjecturer pour la périodicité de la suite (u_n) ?
On répondra par une phrase rédigée selon le modèle suivant à recopier et compléter sur les lignes ci-dessous :
« D'après les premiers termes, on peut conjecturer que la suite (u_n) est … ».

D'après les premiers termes, on peut conjecturer que la suite (u_n) est pérodique de période 4.

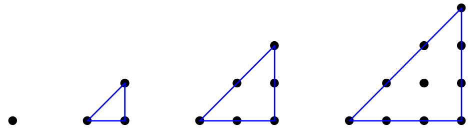
On admet que la conjecture est vraie. Quel est le chiffre des unités de l'écriture en base dix de 3^{2020} ?

1 (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

Vérifier le résultat en calculant en utilisant la console Python comme calculatrice.

Syntaxe pour les puissances en Python : ** donc ici on tapera 3**2020.

II. Les figures ci-dessous décrivent le procédé de construction des « nombres triangulaires », générant ainsi une suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$. Cette suite est connue depuis l'Antiquité par les mathématiciens grecs qui s'y sont intéressés.



1 point 3 points 6 points 10 points

$t_1 = 1$ $t_2 = 3$ $t_3 = 6$ $t_4 = 10$

1°) Calculer $t_1 + t_2$, $t_2 + t_3$, $t_3 + t_4$, $t_4 + t_5$ etc.
Qu'observe-t-on à chaque fois ? Que peut-on conjecturer ?

$t_1 + t_2 = 4 = 2^2$

$t_2 + t_3 = 9 = 3^2$

$t_3 + t_4 = 16 = 4^2$

$t_4 + t_5 = 25 = 5^2$

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad t_n + t_{n+1} = (n+1)^2$.

2°) Déterminer, en justifiant, une expression simplifiée de t_n en fonction de n.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Il s'agit de la formule donnant la somme des entiers naturels de 1 à n (qui correspond à une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1).

3°) Démontrer la conjecture émise au 1°).

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad t_n + t_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)+(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)\cancel{2}(n+1)}{\cancel{2}}$$

$$= (n+1)(n+1)$$

$$= (n+1)^2$$

La conjecture est donc démontrée.