T^ale^ **experts**

Contrôle du mercredi 23 septembre 2020 (55 minutes)

- fiche
- calculatrice

Écrire très lisiblement, sans ratures et sans utiliser d'abréviations.
Ne rien surligner, ne rien écrire en dehors de ce qui est demandé.

Note : …. / 20

Prénom : ……………………………… **Nom : ……………………………………………………**

I. (3 points : 1 point + 2 points)

On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un entier naturel en base douze.
Par exemple : $\overline{\beta\alpha7}^{(12)} = \beta\times12^2 + \alpha\times12 + 7 = 11\times12^2 + 10\times12 + 7 = \overline{1711}^{(10)}$.

On considère les nombres $N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{(12)}$ et $N_2 = \overline{1131}^{(10)}$.
Déterminer l'écriture de N_1 en base dix et l'écriture de N_2 en base douze.
Écrire à chaque fois une égalité sans justifier ($N_1 = ...$ à gauche et $N_2 = ...$ à droite).

………………………… …………………………

II. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Le code d'identification d'un article est formé de sept chiffres entre 0 et 9. Les six premiers chiffres identifient l'article, le septième est une clé de contrôle destinée à déceler une erreur dans l'écriture des six premiers. On notera $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ un tel code. La clé de contrôle x_7 est le chiffre des unités de l'écriture en base dix de la somme $N = (x_1 + x_3 + x_5) + 7(x_2 + x_4 + x_6)$.

1°) Calculer la clé du code suivant : 9 2 3 4 5 1 •.

……… (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

2°) Un des chiffres du code suivant a été effacé : 1 1 2 • 7 7 4. Le déterminer.

……… (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

III. (3 points)

De combien de façons peut-on écrire le nombre 5 comme produit de deux entiers naturels ? Préciser.

……

Déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels tels que $xy + y^2 = 5 \quad (1)$.

Répondre sans faire de phrase et détailler la recherche sur les lignes en utilisant du début à la fin une <u>chaîne d'équivalences</u>.

…………………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (1 point)

Soit *a* et *b* deux entiers naturels compris entre 1 et 9. On pose $A = \overline{ab}$ et $B = \overline{ba}$ (en base dix).
Exprimer $N = A - B$ en fonction de *a* et *b*.

……

……

……

V. (2 points)

On rappelle la définition suivante :
« Étant donnés deux entiers relatifs a et b, on appelle combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs une expression de la forme $ua+vb$ où u et v sont deux entiers relatifs (appelés coefficients de la combinaison) ».

On pose $\mathrm{A}=3n-1$ et $\mathrm{B}=5n-1$ où n est un entier relatif quelconque.
Déterminer une combinaison linéaire de A et B à coefficients entiers relatifs dont le résultat est un entier relatif non nul indépendant de n.

……

……

VI. (1 point)

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on note u_n le chiffre des unités de l'écriture en base dix de 2^n.
À l'aide des premiers termes, que peut-on conjecturer pour la périodicité de la suite (u_n) ?
On répondra par une phrase rédigée selon le modèle suivant à recopier et compléter sur les lignes ci-dessous :
« D'après les premiers termes, on peut conjecturer que la suite (u_n) est … ».

……

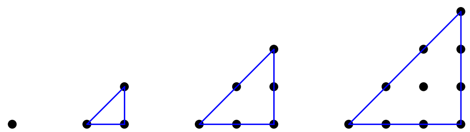
……

On admet que la conjecture est vraie. Quel est le chiffre des unités de l'écriture en base dix de 2^{2020} ?

……. (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

VII. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Les figures ci-dessous décrivent le procédé de construction des « nombres triangulaires », générant ainsi une suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$. Cette suite est connue depuis l'Antiquité par les mathématiciens grecs qui s'y sont intéressés.



1 point — 3 points — 6 points — 10 points

$t_1=1$ $\quad t_2=3$ $\quad t_3=6$ $\quad t_4=10$

1°) Préciser la valeur de t_5.
2°) Déterminer un entier naturel n autre que 1 tel que t_n soit un carré parfait.

1°) ……………….. (une seule égalité)   2°) ….. (une seule réponse, <u>sans égalité</u>)

VIII. (3 points)

Pour tout entier relatif n, on pose $\mathrm{A}(n)=n^2+2n-2$ et $\mathrm{B}(n)=n-1$.
On pourra admettre sans le démontrer que $\mathrm{A}(n)$ et $\mathrm{B}(n)$ sont des entiers relatifs.

On pose $E=\mathbb{Z}\setminus\{1\}$. Pour tout $n\in E$, on pose $\mathrm{C}(n)=\dfrac{\mathrm{A}(n)}{\mathrm{B}(n)}$.

Dans chaque cas, donner dans la colonne de droite la valeur de vérité (V ou F) de la proposition. Écrire une justification rapide sur les lignes ci-dessous.

P_1 : « Pour tout $n\in E$, $\mathrm{C}(n)$ est un nombre rationnel ».	
P_2 : « Pour tout $n\in E$, $\mathrm{C}(n)$ est un nombre décimal ».	
P_3 : « Il existe au moins un entier $n\in E$ tel que $\mathrm{C}(n)$ est un nombre entier ».	

P_1 : ……………………………………………………………………………………………………

……

P_2 : ……………………………………………………………………………………………………

P_3 : ……………………………………………………………………………………………………

IX. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère l'équation $3x-5y=1$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y)\in\mathbb{Z}^2$.

1°) Donner sans expliquer un couple solution de (E). ……………… (une seule réponse sans égalité)

2°) Vérifier que pour tout entier relatif k le couple $(5k-3\,;\,3k-2)$ est une solution de (E) (une ligne de calcul).

……

……

3°) Donner sans justifier un couple solution formé d'entiers supérieurs ou égaux à 2020.
On pourra éventuellement utiliser le résultat de la question précédente.

……………………………. (une seule réponse, sans égalité)

Corrigé du contrôle du 23-9-2020

I.

On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un entier naturel en base douze.
Par exemple : $\overline{\beta\alpha 7}^{(12)} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = \overline{1711}^{(10)}$.

On considère les nombres $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{(12)}$ et $N_2 = \overline{1131}^{(10)}$.
Déterminer l'écriture de N_1 en base dix et l'écriture de N_2 en base douze.
Écrire à chaque fois une égalité sans justifier ($N_1 = ...$ à gauche et $N_2 = ...$ à droite).

$N_1 = \overline{1606}^{(10)}$ $\qquad\qquad$ $N_2 = \overline{7\alpha 3}^{(12)}$

L'écriture de N_1 en base dix ne pose pas de difficulté.

L'écriture de N_2 en base douze peut s'obtenir aisément en effectuant des divisions euclidiennes successives.

$1131 = 12 \times 94 + 3$

$94 = 12 \times 7 + 10$

$7 = 12 \times 0 + 7$

On peut écrire $N_2 = 7 \times 12^2 + 10 \times 12 + 3$ donc $N_2 = \overline{7\alpha 3}^{(12)}$.

II.

Le code d'identification d'un article est formé de sept chiffres entre 0 et 9. Les six premiers chiffres identifient l'article, le septième est une clé de contrôle destinée à déceler une erreur dans l'écriture des six premiers. On notera $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ un tel code. La clé de contrôle x_7 est le chiffre des unités de l'écriture en base dix de la somme $N = (x_1 + x_3 + x_5) + 7(x_2 + x_4 + x_6)$.

1°) Calculer la clé du code suivant : 9 2 3 4 5 1 •.

6 (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

On a $x_1 = 9$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 1$.

On cherche x_7.

On calcule donc $N = (x_1 + x_3 + x_5) + 7(x_2 + x_4 + x_6) = 9 + 3 + 5 + 7 \times (2 + 4 + 1) = 17 + 49 = 66$.

On en déduit que $x_7 = 6$ car $x_7 =$ chiffre des unités de N.

2°) Un des chiffres du code suivant a été effacé : 1 1 2 • 7 7 4. Le déterminer.

4 (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

La seule méthode consiste à tester les différents chiffres possibles : 0, 1, 2, …, 9.

III.

De combien de façons peut-on écrire le nombre 5 comme produit de deux entiers naturels ? Préciser.

On peut écrire 5 comme produit de deux entiers naturels de deux façons : $5 = 5 \times 1 = 1 \times 5$ (en tenant compte de l'ordre des facteurs).

Il s'agit des deux décompositions de 5 comme produit de deux entiers naturels en tenant compte de l'ordre des facteurs.

On peut aussi dire qu'il s'agit des deux écritures multiplicatives de 5 comme produit d'entiers naturels.

Déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels tels que $xy + y^2 = 5 \quad (1)$.

Répondre sans faire de phrase et détailler la recherche sur les lignes en utilisant du début à la fin une <u>chaîne d'équivalences</u>.

$(4\,;1)$

$(1) \Leftrightarrow y(x + y) = 5$ (on factorise le membre de gauche)

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ (on utilise les décompositions possibles de 5 comme produit de deux entiers naturels)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

Comme $(x\,;\,y) \in \mathbb{N}^2$, le seul couple d'entiers naturels vérifiant (1) est le couple $(4\,;1)$.

IV.

Soit *a* et *b* deux entiers naturels compris entre 1 et 9. On pose $A = \overline{ab}$ et $B = \overline{ba}$ (en base dix).
Exprimer $N = A - B$ en fonction de *a* et *b*.

$N = A - B$

$= 10a + b - (10b + a)$ (on écrit les décompositions en base dix des nombres A et B)

$= 9a - 9b$

On peut éventuellement mettre 9 en facteur mais cela n'a rien d'obligatoire.

V.

On rappelle la définition suivante :
« Étant donnés deux entiers relatifs *a* et *b*, on appelle combinaison linéaire de *a* et *b* à coefficients entiers relatifs une expression de la forme $ua + vb$ où *u* et *v* sont deux entiers relatifs (appelés coefficients de la combinaison) ».

On pose $A = 3n - 1$ et $B = 5n - 1$ où *n* est un entier relatif quelconque.

Déterminer une combinaison linéaire de A et B à coefficients entiers relatifs dont le résultat est un entier relatif non nul indépendant de *n*.

On vérifie aisément que l'expression $C = 5A - 3B$ est une combinaison linéaire qui répond à la question.

$C = 5A - 3B$

$= 5(3n-1) - 3(5n-1)$

$= \cancel{15n} - 5 \cancel{-15n} + 3$

$= -2$

Les coefficients 5 et – 3 sont des entiers relatifs. Ils ont été choisis de sorte que les *n* s'annulent.

VI.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le chiffre des unités de l'écriture en base dix de 2^n.
À l'aide des premiers termes, que peut-on conjecturer pour la périodicité de la suite (u_n) ?
On répondra par une phrase rédigée selon le modèle suivant à recopier et compléter sur les lignes ci-dessous :
« D'après les premiers termes, on peut conjecturer que la suite (u_n) est … ».

D'après les premiers termes, on peut conjecturer que la suite (u_n) est périodique de période 4.

n	2^n	u_n
1	2	2
2	4	4
3	8	8
4	16	6
5	32	2
6	64	4
7	128	8
8	256	6
9	512	2

On observe dans ce tableau une périodicité des restes (on parle aussi de cyclicité) : les valeurs se répètent de 4 en 4.

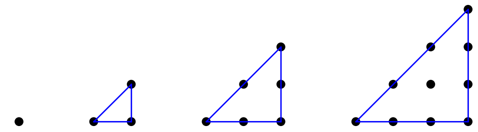
On admet que la conjecture est vraie. Quel est le chiffre des unités de l'écriture en base dix de 2^{2020} ?

6 (une seule réponse, sans égalité et sans justifier)

Le nombre 2020 est de la forme 4*k* avec *k* entier naturel.

VII.

Les figures ci-dessous décrivent le procédé de construction des « nombres triangulaires », générant ainsi une suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$. Cette suite est connue depuis l'Antiquité par les mathématiciens grecs qui s'y sont intéressés.



1 point 3 points 6 points 10 points

$t_1 = 1$ $t_2 = 3$ $t_3 = 6$ $t_4 = 10$

1°) Préciser la valeur de t_5.
2°) Déterminer un entier naturel *n* autre que 1 tel que t_n soit un carré parfait.

1°) $t_5 = 15$ (une seule égalité)

2°) 8 (une seule réponse, <u>sans égalité</u>)

On a $t_8 = 36$.

VIII.

Pour tout entier relatif *n*, on pose $A(n) = n^2 + 2n - 2$ et $B(n) = n - 1$.
On pourra admettre sans le démontrer que $A(n)$ et $B(n)$ sont des entiers relatifs.
On pose $E = \mathbb{Z} \setminus \{1\}$. Pour tout $n \in E$, on pose $C(n) = \dfrac{A(n)}{B(n)}$.
Dans chaque cas, donner dans la colonne de droite la valeur de vérité (V ou F) de la proposition. Écrire une justification rapide sur les lignes ci-dessous.

P_1 : « Pour tout $n \in E$, $C(n)$ est un nombre rationnel ».	V
P_2 : « Pour tout $n \in E$, $C(n)$ est un nombre décimal ».	F
P_3 : « Il existe au moins un entier $n \in E$ tel que $C(n)$ est un nombre entier ».	V

P_1 : $\forall n \in E \quad A(n) \in \mathbb{Z}$ et $B(n) \in \mathbb{Z}^*$ donc $\forall n \in E \quad C(n) \in \mathbb{Q}$.

P_2 : On donne un contre-exemple : $C(4) = \dfrac{22}{3}$ donc $C(4)$ n'est pas un nombre décimal.

P_3 : On donne un exemple au choix : $C(0) = 2$; $C(2) = 6$.

IX.

On considère l'équation $3x-5y=1$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y)\in\mathbb{Z}^2$.

1°) Donner sans expliquer un couple solution de (E). $(-3\,;-2)$ (une seule réponse sans égalité)

On peut aussi donner les couples $(2\,;1)$, $(7\,;4)$, $(12\,;7)$ comme cela a été fait par plusieurs élèves.

2°) Vérifier que pour tout entier relatif k le couple $(5k-3\,;3k-2)$ est une solution de (E) (une ligne de calcul).

$\forall k\in\mathbb{Z}\quad 3(5k-3)-5(3k-2)=\cancel{15k}-9-\cancel{15k}+10=1$

Donc pour tout entier relatif k le couple $(5k-3\,;3k-2)$ est une solution de (E).

Remarque : Pour $k=0$, on retrouve le couple $(-3\,;-2)$ donné comme solution particulière dans la question 1°).

3°) Donner sans justifier un couple solution formé d'entiers supérieurs ou égaux à 2020.
On pourra éventuellement utiliser le résultat de la question précédente.

$(3367\,;2020)$ (une seule réponse, sans égalité)

D'après la question 2°), pour tout entier relatif k, le couple $(5k-3\,;3k-2)$ est une solution de (E).

On cherche $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases}5k-3\geqslant 2020\\3k-2\geqslant 2020\end{cases}$.

Le système est équivalent à $\begin{cases}k\geqslant\dfrac{2023}{5}\\k\geqslant\dfrac{2022}{3}\end{cases}$ soit $k\geqslant 674$ (car k est un entier).

Pour $k=674$, on a $(5k-3\,;3k-2)=(3367\,;2020)$.

On vérifie $3\times 3367-5\times 2020=1$.

On peut aussi trouver un tel couple à l'aide de la calculatrice en « rentrant » une fonction.