TS1

Devoir pour le mercredi 29 avril 2020

I. Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les droites D et D' de repères respectifs $\left(\mathrm{A}, \vec{u}\right)$ et $\left(\mathrm{A}', \vec{u}'\right)$ avec $\mathrm{A}\left(4\,;5\,;-5\right)$, $\vec{u}\left(-2\,;1\,;-3\right)$, $\mathrm{A}'\left(-4\,;4\,;-4\right)$, $\vec{u}'\left(1\,;2\,;3\right)$.

1°) Les droites D et D' sont-elles coplanaires ? Justifier.

2°) On note J le point de coordonnées $\left(2\,;1\,;-3\right)$.
Démontrer qu'il existe un point L de D et un point L' de D' tels que la droite $\left(\mathrm{LL}'\right)$ passe par J.
Donner les coordonnées de L et L'.

On pourra utiliser un logiciel de calcul formel pour résoudre les systèmes.

II. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
À tout réel m on associe la surface S_m d'équation $x^2+y^2+z^2-2\left(2m+1\right)x+2my-2\left(2m-1\right)z-3=0$.

1°) Justifier que pour tout réel m la surface S_m est une sphère dont on précisera les coordonnées du centre Ω_m et le rayon.

2°) Déterminer l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

3°) Dans cette question, on prend $m=2$.
Déterminer l'intersection de S_2 et du plan $\left(x\mathrm{O}y\right)$.

III. On note Γ la représentation graphique de la fonction sinus dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère la fonction $f : x \mapsto \sin\left[\mathrm{E}\left(x\right)\right]$ et on note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan.

Sur un même graphique, tracer Γ et $\mathscr{C}$.

IV. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=1$.

1°) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur *Geogebra*.

2°) Le but de cette question est d'effectuer l'étude de $\mathscr{C}$ à la main.
Démontrer que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f que l'on définira.
Étudier f (dérivée, tableau de variations, limites et conséquences graphique).
Tracer $\mathscr{C}$ sur un graphique en prenant le centimètre pour unité de longueur.

3°) Démontrer que $\mathscr{C}$ admet un axe de symétrie Δ que l'on précisera.

Corrigé du devoir pour le 29-4-2020

I.

1°) On constate immédiatement qu'il n'existe pas de réel α tel que $\overrightarrow{u'}=\alpha\vec{u}$. On en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires. Par suite, les droites D et D' ne sont pas parallèles.

On va étudier si les droites sont sécantes. Pour cela, on va écrire des systèmes d'équations paramétriques des deux droites.

$$D\begin{cases} x=4-2\lambda \\ y=5+\lambda \\ z=-5-3\lambda \end{cases} \quad (\lambda\in\mathbb{R}) \qquad\qquad D'\begin{cases} x=-4+\lambda' \\ y=4+2\lambda' \\ z=-4+3\lambda' \end{cases} \quad (\lambda'\in\mathbb{R})$$

On résout $\begin{cases} 4-2\lambda=-4+\lambda' & (1) \\ 5+\lambda=4+2\lambda' & (2) \\ -5-3\lambda=-4+3\lambda' & (3) \end{cases}$ d'inconnue $(\lambda,\lambda')\in\mathbb{R}^2$.

On peut utiliser l'application « photomaths » ou le site dcode.

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=3 \\ \lambda'=2 \end{cases}$$

L'équation (3) n'est pas vérifiée donc D et D' ne sont pas parallèles.

On en déduit que D et D' ne sont pas coplanaires.

Autre méthode :

2°) On cherche un point L de D et un point L' de D' tels que les vecteurs $\overrightarrow{\text{JL}}$ et $\overrightarrow{\text{JL}'}$ soient colinéaires.

On note λ le paramètre associé à L pour la droite D et λ' le paramètre associé à L' pour la droite D'.

On calcule ensuite les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{JL}}$ et $\overrightarrow{\text{JL}'}$.

$$\overrightarrow{\text{JL}}\left|\begin{matrix} 4-2\lambda-2=2-2\lambda \\ 5+\lambda-1=4+\lambda \\ -5-3\lambda+3=-2-3\lambda \end{matrix}\right. \qquad \overrightarrow{\text{JL}'}\left|\begin{matrix} \lambda'-6 \\ 2\lambda'+3 \\ 3\lambda'-1 \end{matrix}\right.$$

Il y a deux méthodes pour résoudre.

1ère méthode :

On vérifie sans peine que J n'appartient pas à D (ni à D').
On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{\text{JL}}$ n'est pas nul, donc $\overrightarrow{\text{JL}}$ et $\overrightarrow{\text{JL}'}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel α tel que $\overrightarrow{\text{JL}'}=\alpha\overrightarrow{\text{JL}}$ $\quad(1)$.

(1) se traduit en système sous la forme $\begin{cases} \lambda'-6=\alpha(2-2\lambda) & (1) \\ 2\lambda'+3=\alpha(4+\lambda) & (2) \\ 3\lambda'-1=\alpha(-2-3\lambda) & (3) \end{cases}$.

C'est un système à 3 équations et 3 inconnues.

Aucune des équations du système n'est linéaire donc le système n'est pas linéaire.
On ne peut pas résoudre ce système comme un système linéaire.

$(1) \Leftrightarrow \lambda'-6=2\alpha-2\lambda\alpha$

$\Leftrightarrow \lambda'=6+2\alpha-2\lambda\alpha \quad (1')$

En remplaçant dans (2), on obtient $2(6+2\alpha-2\lambda\alpha)+3=4\alpha+\lambda\alpha$ soit $15=5\lambda\alpha$ soit finalement $\lambda\alpha=3$.

En reprenant $(1')$, on peut écrire $\lambda'=6+2\alpha-2\times3$ ce qui donne immédiatement $\lambda'=2\alpha$.

On utilise alors l'équation (3) en développant le second membre.

On peut écrire $3\lambda'-1=-2\alpha-3\lambda\alpha$ ce qui donne $3\times2\alpha-1=-2\alpha-3\times3$ soit $8\alpha=-8$ et donc $\alpha=-1$.

L'égalité $\lambda\alpha=3$ donne alors $\lambda=-3$.

On peut aussi utiliser le site dcode (résolution des systèmes d'équations).

On obtient finalement $\begin{cases} \lambda=-3 \\ \lambda'=-2 \\ \alpha=-1 \end{cases}$.

On remplace dans les systèmes d'équations paramétriques pour obtenir les coordonnées de L et de L'.

$L\left| \begin{array}{l} 4-2\times(-3)=10 \\ 5-3=2 \\ -5-3\times(-3)=4 \end{array} \right.$ $\qquad$ $L'\left| \begin{array}{l} -6 \\ 0 \\ -10 \end{array} \right.$

Le point J est alors le milieu de $[LL']$ puisque $\overrightarrow{JL'}=-\overrightarrow{JL}$.

2[e] méthode : On utilise le critère de colinéarité dans l'espace avec trois déterminants.

II. $S_m\ :\ x^2+y^2+z^2-2(2m+1)x+2my-2(2m-1)z-3=0$

1°) On est obligé de passer par la forme canonique pour démontrer que S_m est une sphère quel que soit le réel *m*.
On sépare en plusieurs groupes avec *x*, *y*, *z*.
On veut écrire l'équation sous la forme $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ où *a*, *b*, *c*, *R* sont des réels, *R* étant strictement positif.

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$\mathrm{M}\in S_m \Leftrightarrow x^2-2(2m+1)x+y^2+2my+z^2-2(2m-1)z-3=0$

$\Leftrightarrow \left[x-(2m+1)\right]^2-(2m+1)^2+(y+m)^2-m^2+\left[z-(2m-1)\right]^2-(2m-1)^2-3=0$ (mise sous forme canonique des trinômes du second degré en *x*, *y*, *z*)

$\Leftrightarrow \left[x-(2m+1)\right]^2+(y+m)^2+\left[z-(2m-1)\right]^2-(2m+1)^2-m^2-(2m-1)^2-3=0$

$\Leftrightarrow \left[x-(2m+1)\right]^2+(y+m)^2+\left[z-(2m-1)\right]^2=(2m+1)^2+m^2+(2m-1)^2+3$

$\Leftrightarrow \left[x-(2m+1)\right]^2+(y+m)^2+\left[z-(2m-1)\right]^2=9m^2+5$

Pour tout réel *m*, $9m^2+5>0$ donc pour tout réel *m*, S_m est une sphère de centre $\Omega_m\ (2m+1\,;-m\,;2m-1)$ et de rayon $\sqrt{9m^2+5}$.

2°) Déterminer l'ensemble des points Ω_m lorsque *m* décrit $\mathbb{R}$.

D'après la question précédente, $\begin{cases} x_\Omega=2m+1\\ y_\Omega=-m\\ z_\Omega=2m-1\end{cases}$.

On reconnaît une représentation paramétrique de droite.
On peut donc dire que l'ensemble des points Ω_m lorsque *m* décrit $\mathbb{R}$ est la droite *D* de repère $(\mathrm{A}, \vec{u})$ avec $\mathrm{A}(1\,;0\,;-1)$ [obtenu pour $m=0$] et $\vec{u}\ (2\,;-1\,;2)$.

3°) On cherche à déterminer l'intersection de S_2 et du plan $(x\mathrm{O}y)$.

On fait une représentation dans l'espace. On se réfère au cours sur la position relative d'une sphère et d'un plan dans l'espace.

S_2 est la sphère de centre $\Omega_2\ (5\,;-2\,;3)$ et de rayon $\sqrt{41}$.

La distance de Ω_2 au plan $(x\mathrm{O}y)$ est égale à $\left|\,z_{\Omega_2}\,\right|=3$.

$\mathrm{d}(\Omega_2,(x\mathrm{O}y))=3$ donc $\mathrm{d}(\Omega_2,(x\mathrm{O}y))<\sqrt{41}$.

Par conséquent, l'intersection de S_2 avec le plan $(x\mathrm{O}y)$ est le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\mathrm{H}(5\,;-2\,;0)$ et de rayon $r=\sqrt{41-9}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ (ce rayon est obtenu par application du théorème de Pythagore).

IV. $\mathscr{C}$: $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=1$

1°)

2°) On doit démontrer que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f que l'on définira.

On cherche à exprimer y en fonction de x.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnée $(x\,;\,y)$.

$$\mathrm{M}\in\mathscr{C} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=1$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^y=1-\mathrm{e}^x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-\mathrm{e}^x>0\\ y=\ln\left(1-\mathrm{e}^x\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x<0\\ y=\ln\left(1-\mathrm{e}^x\right)\end{cases}$$

On en conclut que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1-\mathrm{e}^x\right)$ définie sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

On va donc étudier f.

$$\forall x\in\,]-\infty\,;0[\quad f\,'(x)=-\frac{\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$$

x	$-\infty$		0
Signe de $-\mathrm{e}^x$		$-$	
Signe de $1-\mathrm{e}^x$		$+$	0
Signe de $f\,'(x)$		$-$	||
Variations de f	0	↘	$-\infty$ ||

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

On va donc étudier f.

On cherche ensuite les limites de f aux bornes du domaine de définition c'est-à-dire en $-\infty$ et en 0^-.

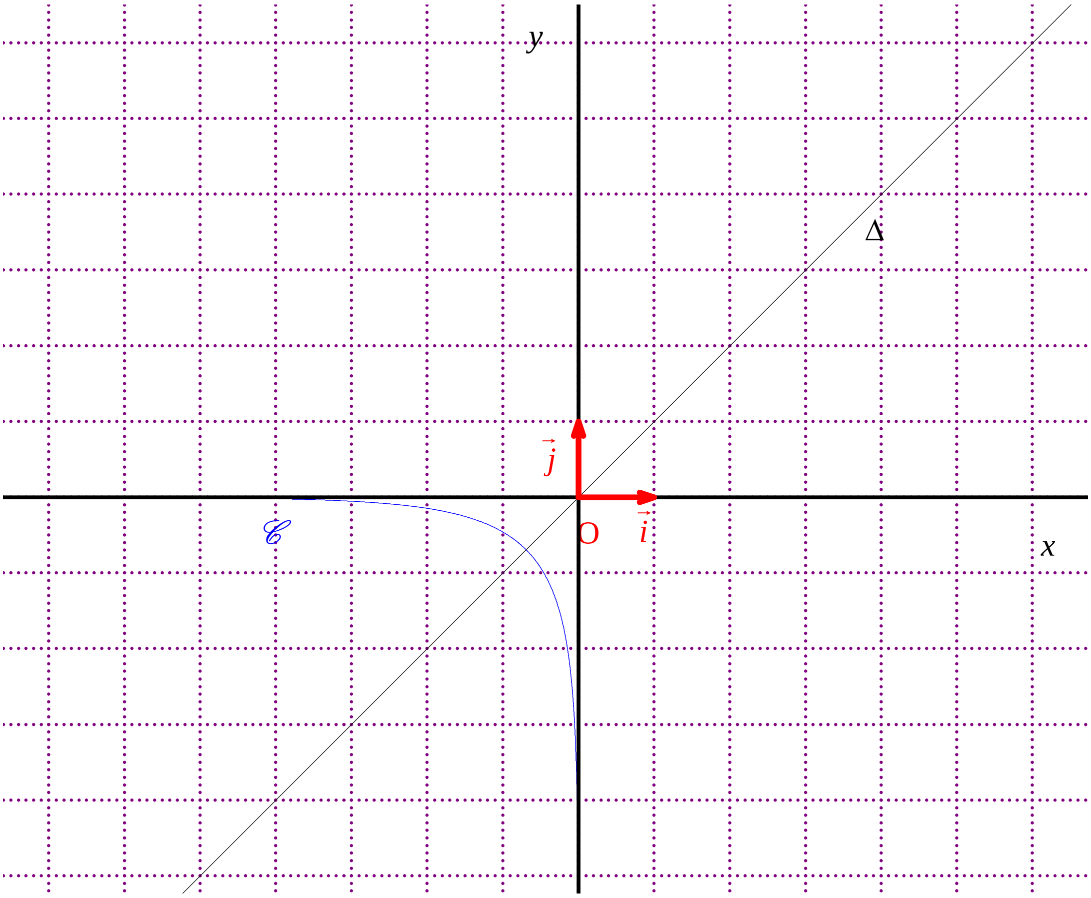
$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty}\Big(\underbrace{1-\mathrm{e}^x}_{X}\Big)=1\\ &\lim_{X\to1}\ln X=0\end{aligned}\right\}\text{ donc par limite d'une composée, on a }\lim_{x\to-\infty} f(x)=0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\underbrace{1-e^x}_{X}\right) = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = 0\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une composée, on a $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

La limite de f en $-\infty$ permet d'affirmer que $\mathscr{C}$ admet l'axe des l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$.

La limite de f en 0^- permet d'affirmer que $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

On place quelques poins pour effectuer le tracé de $\mathscr{C}$.



3°) On note Δ la droite d'équation $y = x$.

On considère un point $M(x\,;y)$ quelconque du plan et on note $M'(x'\,;y')$ son symétrique par rapport à la droite Δ.

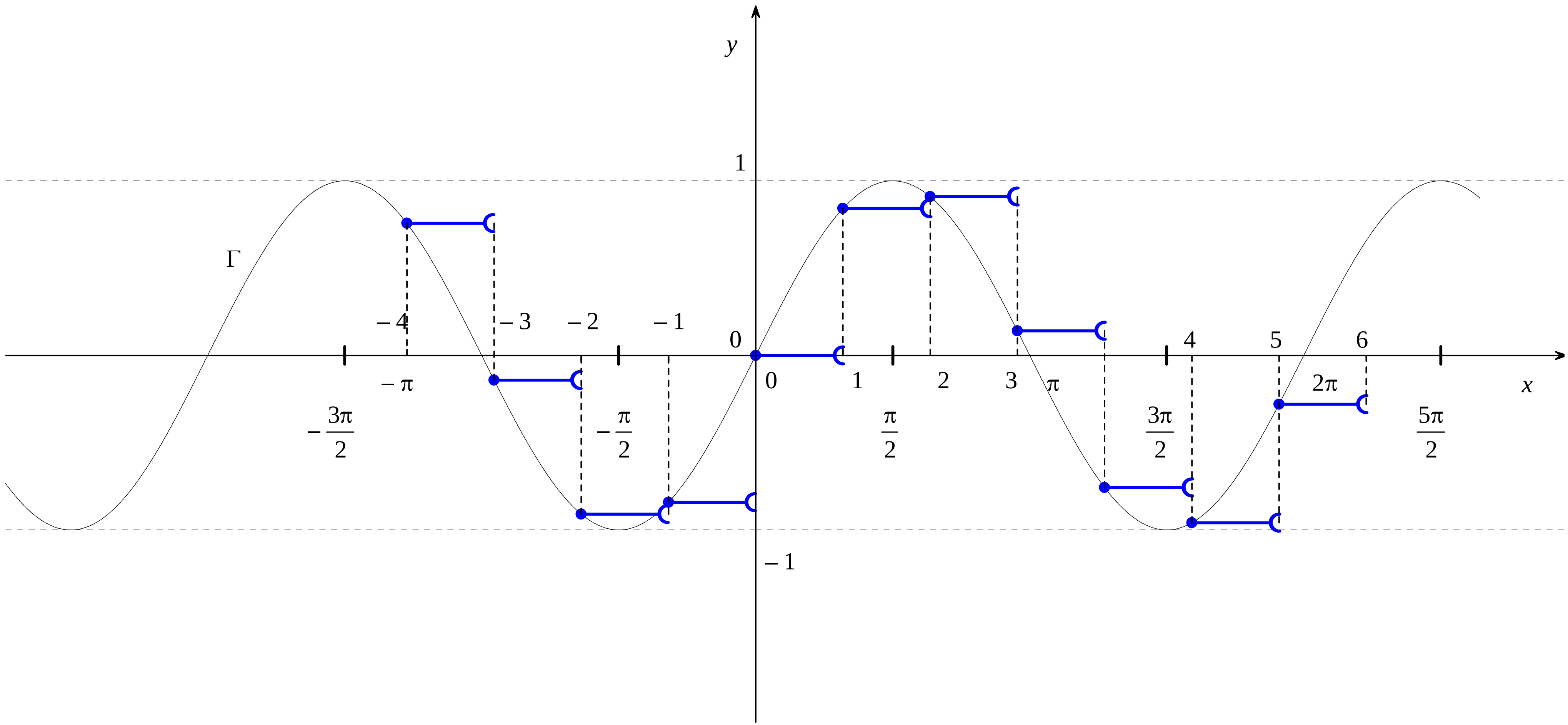
On sait que $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow e^{y'} + e^{x'} = 1$$

$$\Leftrightarrow M' \in \mathscr{C}$$

On en déduit que $\mathscr{C}$ est globalement invariante par la symétrie d'axe Δ c'est-à-dire que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ pour axe de symétrie.

III. $f : x \mapsto \sin\left[\mathrm{E}(x)\right]$


y
x
1
−1
0
Γ
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
−π
π
2π
3π/2
−3π/2
π/2
−π/2
5π/2