TS1

Contrôle du mercredi 11 mars 2020 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………   **Note :** …….. **/ 20**

I. (3 points : 2 points + 1 point)

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto x - m\ln\left(x^2+1\right)$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par un point fixe que l'on précisera et ont la même tangente en ce point.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

À tout entier naturel $n \geqslant 1$ on associe la fonction $f_n : x \mapsto x^n e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f_n'(x)$. On mettra $x^{n-1}e^{-x}$ en facteur dans le résultat.

………

………

………

………

2°) Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ au point A d'abscisse 1 ?

………

III. (4 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-2)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. On commencera par observer que l'on a une forme indéterminée pour l'une des deux limites.

………

………

………

………

………

2°) Former le tableau de variations de f avec les limites.

………

………

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

À tout nombre complexe z non nul on associe le nombre complexe $z' = 1 - \dfrac{1}{z}$.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Dans cette question, on prend $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
Déterminer une écriture exponentielle de z et de z'.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

2°) Dans cette question, on prend $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$.

Déterminer une écriture exponentielle de z et de z'.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

V. (2 points)

On pose $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Calculer z^n et z^{2n}.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

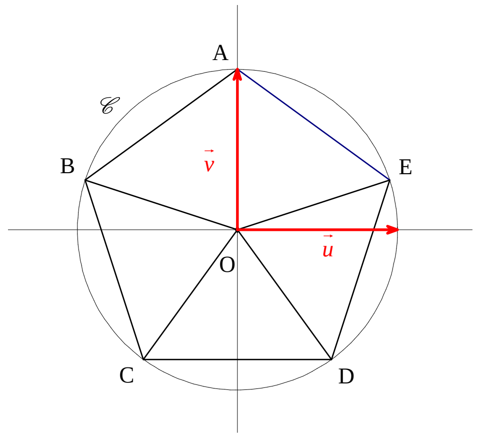
…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

VI. (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Sur le graphique ci-dessous, ABCDE est un pentagone régulier convexe direct inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.



Déterminer les affixes des points B, C, D, E sous forme exponentielle.
On donnera les réponses sans explications.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 11-3-2020

I.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto x - m\ln\left(x^2+1\right)$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par un point fixe que l'on précisera et ont la même tangente en ce point.

Si on ne trouve pas immédiatement, on peut utiliser la calculatrice et tracer des courbes $\mathscr{C}_m$ pour plusieurs valeurs de m. On observe que toutes les courbes semblent passer par l'origine du repère.
C'est ce qu'on va démontrer.

$\forall m \in \mathbb{R} \quad f_m(0) = 0 - m\ln\left(0^2+1\right) = -m\ln 1 = 0$

On en déduit que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par le point O.

La fonction f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m'(x) = 1 - \dfrac{2mx}{x^2+1}$

Le coefficient directeur de la tangente en O à $\mathscr{C}_m$ est $f_m'(0) = 1 - \dfrac{2m\times 0}{0^2+1} = 1$.

Le résultat est indépendant de m donc toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ ont la même tangente au point O.

Il faut absolument respecter la notation précise de la fonction f_m avec le m en indice.

II.

À tout entier naturel $n \geqslant 1$ on associe la fonction $f_n : x \mapsto x^n e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f_n'(x)$. On mettra $x^{n-1}e^{-x}$ en facteur dans le résultat.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n \times \left(-e^{-x}\right)$$
$$= x^{n-1}e^{-x}(n-x)$$

2°) Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ au point A d'abscisse 1 ?

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ au point A d'abscisse 1 est
$f_n'(1) = 1^{n-1} \times e^{-1} \times (n-1) = \dfrac{1}{e} \times (n-1) = \dfrac{n-1}{e}$.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-2)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. On commencera par observer que l'on a une forme indéterminée pour l'une des deux limites.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

L'étude de la limite de $f(x)$ lorsque x tend $-\infty$ fait apparaître une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ».

On va développer l'expression de $f(x)$ pour lever la forme indéterminée.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = xe^x - 2e^x$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x) = 0 \text{ (limites de référence)} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\end{array}\right\}$ donc par limite d'une différence $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

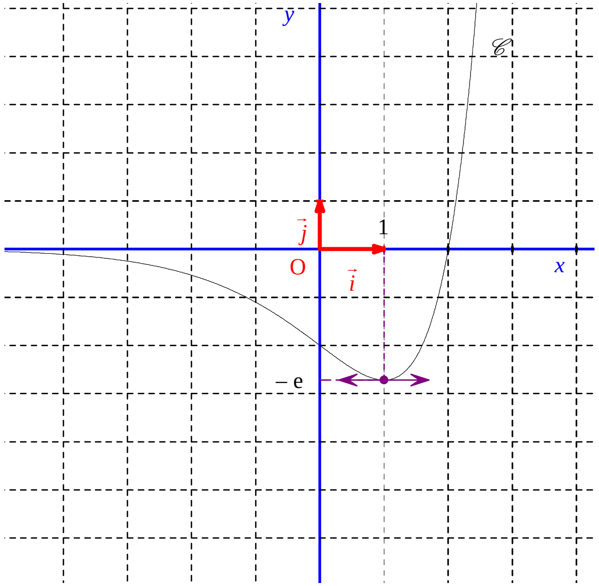
2°) Former le tableau de variations de f avec les limites.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$

f' s'annule en 1.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		–	0	+	
Variations de f	0	↘	$-e$	↗	$+\infty$

On vérifie en utilisant la calculatrice graphique.



IV.

À tout nombre complexe z non nul on associe le nombre complexe $z' = 1 - \dfrac{1}{z}$.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Dans cette question, on prend $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
Déterminer une écriture exponentielle de z et de z'.

$z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

On va commencer par calculer z' en forme algébrique.

$z' = \dfrac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$

$z' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i} \times \dfrac{1}{2}\right)$

$z' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

2°) Dans cette question, on prend $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$.

Déterminer une écriture exponentielle de z et de z'.

$z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$z' = \mathrm{i}$

$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

On vérifie tous les résultats grâce à la calculatrice.

V.

On pose $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Calculer z^n et z^{2n}.

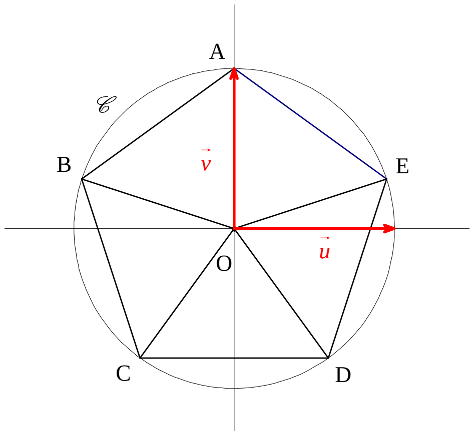
$z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$

$z^{2n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$

VI.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Sur le graphique ci-dessous, ABCDE est un pentagone régulier convexe direct inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.



Déterminer les affixes des points B, C, D, E sous forme exponentielle.
On donnera les réponses sans explications.

B, C, D, E appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ qui a pour centre O et pour rayon 1.
On en déduit que leurs affixes ont donc toutes pour module 1.

Il faut ensuite déterminer un argument de chacune des affixes.

Pour cela, on raisonne géométriquement, en cherchant une mesure en radians des angles orientés $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OC}\right)$, $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OD}\right)$, $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OE}\right)$.

On va utiliser le fait que les angles au centre d'un pentagone régulier convexe ont tous pour mesure $\dfrac{2\pi}{5}$.

Par la relation de Chasles pour les angles orientés, on peut écrire :

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OE}\right)\ (2\pi)$$

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\ (2\pi)$$

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{10}\ (2\pi)$$

On en déduit que $z_E=e^{i\frac{\pi}{10}}$.

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OB}\right)=\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)\ (2\pi)$$

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}\ (2\pi)$$

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OB}\right)=\frac{9\pi}{10}\ (2\pi)$$

On en déduit que $z_B=e^{i\frac{9\pi}{10}}$.

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OD}\right)=\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OD}\right)\ (2\pi)$$

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OD}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{5}\ (2\pi)$$

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{3\pi}{10}\ (2\pi)$$

On en déduit que $z_D=e^{-i\frac{3\pi}{10}}$.

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OC}\right)=\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\right)\ (2\pi)$$

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{5}\ (2\pi)$$

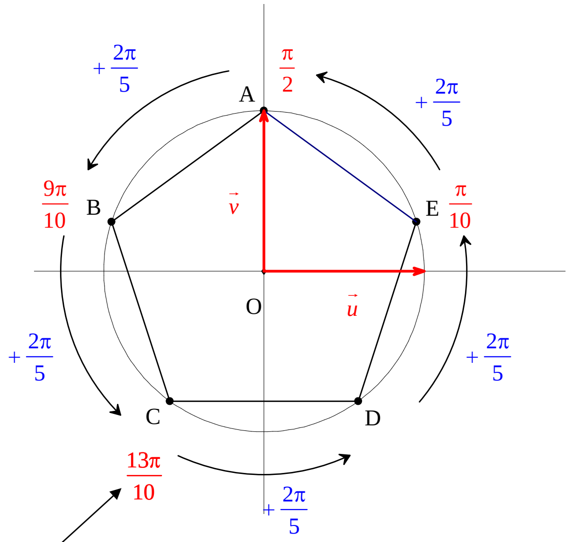
$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OC}\right)=\frac{13\pi}{10}\ (2\pi)$$

On en déduit que $z_C=e^{i\frac{13\pi}{10}}$.

On peut aussi écrire $z_C=e^{-i\frac{7\pi}{10}}$ car $-\dfrac{7\pi}{10}$ est aussi une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OC}\right)$.

Version plus courte :

On fait apparaître des rotations d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$.



On peut aussi calculer $\dfrac{13\pi}{10}-2\pi=-\dfrac{7\pi}{10}$.