TS1

Contrôle du mercredi 4 mars 2020 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note : ……../ 20**

I. (10 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point ; 5°) 2 points ; 6°) 1 point ; 7°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto x - \ln\left(x^2+1\right)$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \text{I}, \text{J}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient avec numérateur factorisé.

………..

………..

………..

………..

2°) Compléter sans explication la phrase :

f' s'annule en … [écrire la (ou les) valeur(s) de *x*, sans égalités].

Dans un même tableau, étudier le signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

3°) Donner sans explication $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Pour cette dernière limite, on écrira $f(x) = x - 2\ln x - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ puis $f(x) = x\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ pour $x > 0$.

Compléter le tableau de variations avec ces deux limites.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

4°) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

………..

………..

5°) Expliquer pourquoi pour tout réel *k* l'équation $f(x) = k \quad (\text{E})$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

………..

………..

………..

………..

6°) Calculer $f''(x)$.

………..

………..

………..

………..

7°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite D d'équation $y = x - 1$.

………………………….. (écrire les valeurs des abscisses sans égalités)

II. (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{x}$ et $g : x \mapsto (x+1)^2 e^{-x}$.

Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.
On donnera les résultats sous forme factorisée.

………

………

………

………

………

………

………

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto x e^{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O, I, J})$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous forme factorisée.

………

………

………

2°) Compléter la phrase :

$\mathcal{C}$ admet une tangent horizontale aux points d'abscisses …………………………...

3°) Le but de cette question est de déterminer la limite de f en $+\infty$.

Quelle forme indéterminée rencontre-t-on dans l'étude de la limite de $f(x)$ lorsque x tend $+\infty$?

………

Vérifier que pour tout réel x non nul, on a $f(x) = \dfrac{e}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

………

………

Rappeler $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X}$ puis écrire directement $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X}$.

………

Conclure. On utilisera en particulier le changement de variable $X = x^2$.

………

………

………

………

4°) En observant que $f(x) = -\dfrac{1}{2} \times (-2x) \times e^{1-x^2}$, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

……………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 4-3-2020

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto x - \ln\left(x^2+1\right)$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient avec numérateur factorisé.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

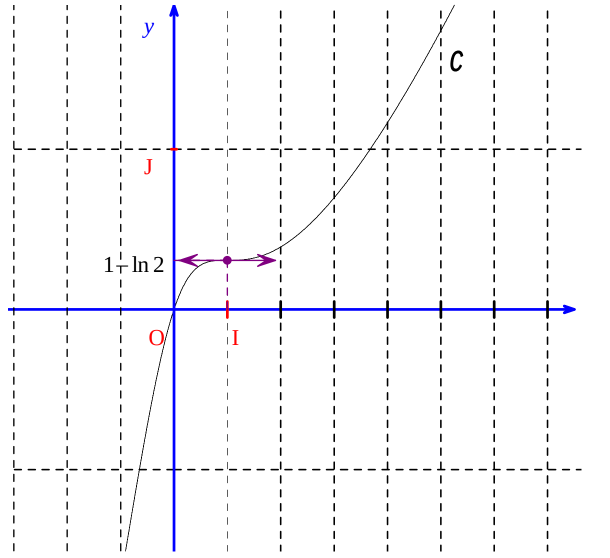
2°) Compléter sans explication la phrase :

f' s'annule en 1 [écrire la (ou les) valeur(s) de x, sans égalités].

Dans un même tableau, étudier le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	+	
Variations de f	$-\infty$	↗			$+\infty$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



3°) Donner sans explication $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Pour cette dernière limite, on écrira $f(x) = x - 2\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ puis $f(x) = x\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x > 0$.

Compléter le tableau de variations avec ces deux limites.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x - \ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= x - \ln\left(x^2\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x - 2\ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-2\frac{\ln x}{x}\right) = 1$.

On obtient ensuite $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right)\right] = +\infty$.

Par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par limite d'une différence.

Par un calcul simple, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

4°) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

On a $f(0)=0$ donc $\mathcal{C}$ passe par le point O.

Par ailleurs, $f'(0)=1$ donc T a pour équation $y=x$.

5°) Expliquer pourquoi pour tout réel k l'équation $f(x)=k \quad (\text{E})$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

C_1 : f est continue sur $\mathbb{R}$.

C_2 : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

C_3 : k appartient à l'intervalle défini par les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition c'est-à-dire $\mathbb{R}$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa version généralisée, l'équation (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

6°) Calculer $f''(x)$.

On a intérêt à prendre la forme $f'(x)=1-\dfrac{2x}{x^2+1}$.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f''(x)=-2\times\frac{1\times(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=-2\times\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$=2\times\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

7°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite D d'équation $y=x-1$.

$\sqrt{\text{e}-1}$; $-\sqrt{\text{e}-1}$ (écrire les valeurs des abscisses sans égalités)

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\text{e}^{2x}}{x}$ et $g : x \mapsto (x+1)^2\,\text{e}^{-x}$.

Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.
On donnera les résultats sous forme factorisée.

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f'(x)=\frac{2\text{e}^{2x}\times x-\text{e}^{2x}\times 1}{x^2}$$

$$=\frac{\text{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad g'(x)=2\times 1\times(x+1)\text{e}^{-x}+(x+1)^2\times\left(-\text{e}^{-x}\right)$$

$$=(x+1)\text{e}^{-x}\left[2-(x+1)\right]$$

$$=(x+1)\text{e}^{-x}(1-x)$$

$$=\left(1-x^2\right)\text{e}^{-x}$$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto x\text{e}^{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous forme factorisée.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=1\times\text{e}^{1-x^2}+x\times\left(-2x\text{e}^{1-x^2}\right)$$

$$=\text{e}^{1-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

2°) Compléter la phrase :

$\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3°) Le but de cette question est de déterminer la limite de f en $+\infty$.

Quelle forme indéterminée rencontre-t-on dans l'étude de la limite de $f(x)$ lorsque x tend $+\infty$?

On rencontre une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ».

Vérifier que pour tout réel x non nul, on a $f(x)=\dfrac{\text{e}}{x}\times\dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f(x)=x\times\text{e}\times\text{e}^{-x^2}$$

$$f(x)=\frac{\text{e}}{x}\times\frac{x^2}{\text{e}^{x^2}}$$

Rappeler $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\text{e}^X}{X}$ puis écrire directement $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{\text{e}^X}$.

On sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$.

Conclure. On utilisera en particulier le changement de variable $X = x^2$.

Grâce au changement de variable $X = x^2$ dans la limite $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$, on peut écrire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$.

Par ailleurs, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{x} = 0$ de manière quasi-évidente.

Par limite d'un produit, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4°) En observant que $f(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x) \times e^{1-x^2}$, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

$$F(x) = -\frac{e^{1-x^2}}{2}$$