TS1

Contrôle du mercredi 26 février 2020 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : …….. **/ 20**

I. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1°) Démontrer que $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ pour tout réel $x > 0$. Le calcul doit tenir sur les deux lignes ci-dessous.

……..

……..

2°) Compléter sans explication la phrase :

f' s'annule en … [écrire la (ou les) valeur(s) de x, sans égalités].

Dans un même tableau, étudier le signe de $f'(x)$ et les variations de f ; écrire le(s) extremum(s) sous la forme la plus simple possible.

3°) Donner sans explication $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ en détaillant complètement la démarche.
Compléter le tableau de variations avec ces deux limites.

……..

……..

……..

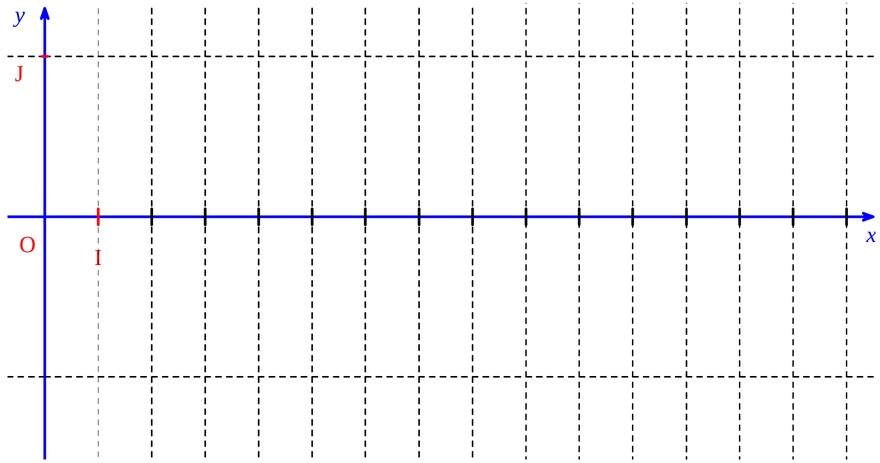
Que peut-on déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ de ces deux limites ? Faire deux phrases correctement rédigées.

……..

……..

……..

Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur le graphique ci-dessous.
On tracera la tangente horizontale.



4°) En observant que $f'(x) = (1 - \ln x) \times \dfrac{1}{x^2}$ et en utilisant la formule de dérivation d'un produit, calculer $f''(x)$.

……..

……..

……..

……..

II. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que la fonction F : $x \mapsto x - \ln\left(x^2 + 1\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Faire le calcul directement sans phrase introductive ; rédiger une phrase de conclusion.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

III. (2 points)

Soit x un réel strictement positif quelconque.

Simplifier l'expression $\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{e}^{2\ln x} - 1}{x+1}$ en détaillant bien la démarche.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

IV. (4 points)

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que l'écriture en base dix de 2020^n comporte au moins 1000 chiffres.

Indication : On observa que le problème se ramène à la détermination n du plus petit entier naturel n tel que $2020^n \geqslant 10^{999}$ (1) et l'on utilisera le logarithme népérien.

Pour la valeur de n ainsi trouvée, déterminer le nombre de chiffres de l'écriture en base dix de 2020^n.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

V. (4 points : 2 points + 2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\ln\left(\mathrm{e}^x - 3\right) = 2$ (1) et $\ln x + \ln 2 = 2\ln\left(x-4\right)$ (2).

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 26-2-2020

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O, I, J}\right)$.

1°) Démontrer que $f\,'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ pour tout réel $x > 0$. Le calcul doit tenir sur les deux lignes ci-dessous.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f\,'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{1-\ln x}{x^2}$$

2°) Compléter sans explication la phrase :

$f\,'$ s'annule en e [écrire la (ou les) valeur(s) de x, sans égalités].

Dans un même tableau, étudier le signe de $f\,'(x)$ et les variations de f ; écrire le(s) extremum(s) sous la forme la plus simple possible.

x	0		e		$+\infty$
Signe de $1-\ln x$	||	+	0	–	
Signe de x^2	0	+		+	
Signe de $f\,'(x)$	||	+	0	–	
Variations de f	|| $-\infty$	↗	$\dfrac{1}{\text{e}}$	↘	0

3°) Donner sans explication $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ en détaillant complètement la démarche.
Compléter le tableau de variations avec ces deux limites.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (limite de référence)

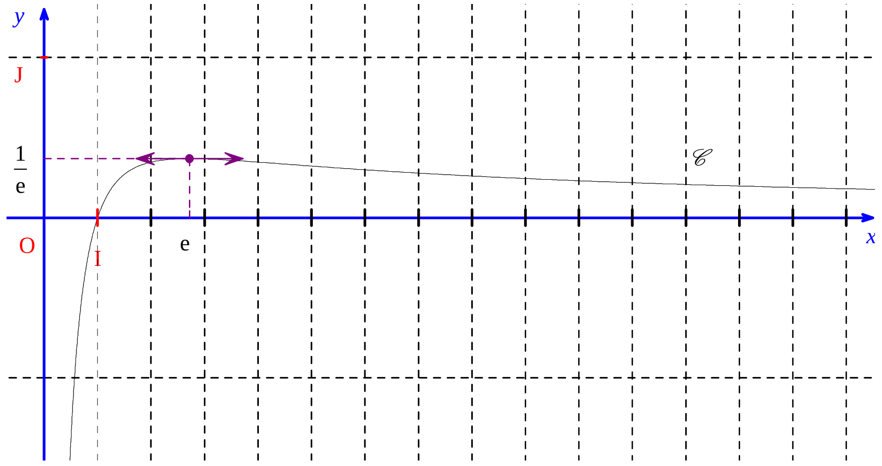
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty .$$

Que peut-on déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ de ces deux limites ? Faire deux phrases correctement rédigées.

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$ et l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

On vérifie ce résultat en traçant la courbe sur la calculatrice.

Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur le graphique ci-dessous.
On tracera la tangente horizontale.



$\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse e.

On doit positionner précisément e et $\dfrac{1}{\text{e}}$ en tenant compte de l'échelle.

$\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point $\text{A}\left(1\,;0\right)$.

4°) En observant que $f\,'(x) = \left(1-\ln x\right) \times \dfrac{1}{x^2}$ et en utilisant la formule de dérivation d'un produit, calculer $f\,''(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f\,''(x) = -\frac{1}{x} \times \frac{1}{x^2} + \left(1-\ln x\right) \times \left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^3} - \frac{2\left(1-\ln x\right)}{x^3}$$

$$= \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

On voit que la dérivée seconde s'annule et change de signe en $\text{e}^{\frac{3}{2}}$ donc $\mathscr{C}$ admet le point d'abscisse $\text{e}^{\frac{3}{2}}$ pour point d'inflexion.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que la fonction F : $x \mapsto x - \ln\left(x^2+1\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Faire le calcul directement sans phrase introductive ; rédiger une phrase de conclusion.

On doit faire très attention à la rédaction et aux notations.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$= f(x)$$

On en déduit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

III.

Soit x un réel strictement positif quelconque.
Simplifier l'expression $\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{e}^{2\ln x}-1}{x+1}$ en détaillant bien la démarche.

$$\mathrm{A} = \frac{\left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^2 - 1}{x+1}$$

$$= \frac{x^2-1}{x+1}$$

$$= \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}$$

$$= x-1$$

IV.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que l'écriture en base dix de 2020^n comporte au moins 1000 chiffres.
Indication : On observa que le problème se ramène à la détermination n du plus petit entier naturel n tel que $2020^n \geqslant 10^{999}$ (1) et l'on utilisera le logarithme népérien.
Pour la valeur de n ainsi trouvée, déterminer le nombre de chiffres de l'écriture en base dix de 2020^n.

$(1) \Leftrightarrow \ln 2020^n \geqslant \ln 10^{999}$

$\Leftrightarrow n \ln 2020 \geqslant 999 \ln 10$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{999 \ln 10}{\ln 2020}$ (on ne change pas le sens de l'inégalité puisque $\ln 2020 > 0$)

Avec la calculatrice, on trouve $\dfrac{999\ln 10}{\ln 2020} = 302{,}237...$.

On peut aussi utiliser le logarithme décimal directement : $n \geqslant \dfrac{999}{\log 2020}$.

Le plus petit entier naturel n vérifiant (1) est 303.

D'après la formule du cours, le nombre de chiffres de l'écriture en base dix de 2020^{303} est $\mathrm{E}\left(\log 2020^{303}\right)+1 = \mathrm{E}(303 \log 2020)+1 = 1001+1 = 1002$.

V.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\ln\left(\mathrm{e}^x - 3\right) = 2$ (1) et $\ln x + \ln 2 = 2\ln(x-4)$ (2).

L'ensemble de résolution de (1) est $]\ln 3\,; +\infty[$ (condition $\mathrm{e}^x - 3 > 0$).

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 3 = \mathrm{e}^2$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^2 + 3$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\mathrm{e}^2+3\right)$ (car $\mathrm{e}^2+3>0$)

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$S_1 = \left\{\ln\left(\mathrm{e}^2+3\right)\right\}$$

On ne peut pas simplifier plus l'écriture $\ln\left(\mathrm{e}^2+3\right)$.

L'ensemble de résolution de (2) est $]4\,;+\infty[$ (conditions $x>0$ et $x-4>0$).

$(2)\ \Leftrightarrow\ \ln 2x=\ln(x-4)^2$

$\Leftrightarrow\ \ln 2x=\ln\left(x^2-8x+16\right)$

$\Leftrightarrow\ 2x=x^2-8x+16$

$\Leftrightarrow\ x^2-10x+16=0$

$\Leftrightarrow\ x=2$ ou $x=8$ (les racines du polynôme $x^2-10x+16$ sont 2 et 8)

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2=\{8\}$