1$^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Contrôle du vendredi 7 février 2020 (50 minutes)

À disposition :
- calculatrice ;
- fiche préparatoire.

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………..…………………………….

Note : ….. / 20

I. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point ; 6°) 1 point)

On lance deux dés tétraédriques (à 4 faces) bien équilibrés deux couleurs, l'un bleu, l'autre rouge, dont les faces sont numérotés 1, 2, 3, 4. On note les numéros des faces supérieures.

On considère l'équation du second degré $x^2+ax+b=0$ (E) d'inconnue réelle x où le coefficient a est donné par le dé bleu et le coefficient b par le dé rouge.
Le tableau ci-dessous donne la valeur du discriminant Δ de l'équation (E) en fonction des numéros des deux dés.

Dé bleu

Dé rouge	1	2	3	4
1	− 3	0	5	12
2	− 7	− 4	1	8
3	− 11	− 8	− 3	4
4	− 15	− 12	− 7	0

On donnera toutes les réponses sous forme décimale exacte.

1°) Quelle est la probabilité que (E) admette au moins une racine dans $\mathbb{R}$?

…………….. (une seule réponse sans égalité)

2°) Quelle est la probabilité que (E) admette exactement une racine dans $\mathbb{R}$?

…………….. (une seule réponse sans égalité)

3°) Sachant que le numéro de la face supérieure du dé bleu est 3, quelle est la probabilité que (E) admette deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$?

…………….. (une seule réponse sans égalité)

4°) Sachant que le numéro de la face supérieure du dé rouge est impair, quelle est la probabilité que (E) n'admette aucune racine dans $\mathbb{R}$?

…………….. (une seule réponse sans égalité)

5°) Sachant que (E) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, quelle est la probabilité que le numéro de la face supérieure du dé bleu soit 3 ?

…………….. (une seule réponse sans égalité)

6°) Quelle est la probabilité que (E) admette – 1 pour racine ?

…………….. (une seule réponse sans égalité)

II. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On dispose de trois sacs S_1, S_2, S_3 contenant des jetons marqués chacun par une lettre. Le sac S_1 contient trois jetons marqués A, B, C. Le sac S_2 contient deux jetons marqués C et D. Le sac S_3 contient deux jetons marqués E et F. On tire au hasard dans l'ordre un jeton de S_1, puis un jeton de S_2 et enfin un jeton de S_3. On obtient alors un « mot » de trois lettres.

Répondre chaque fois par un seul résultat sous forme de fraction irréductible, sans égalité.

1°) Quelle est la probabilité d'obtenir un mot se finissant par E sachant qu'il commence par une consonne ?

…………….. (une seule réponse sans égalité)

2°) Quelle est la probabilité d'obtenir un mot qui commence par une consonne sachant qu'il se finit par E ?

…………….. (une seule réponse sans égalité)

III. (2 points)

Dans un sac, on place 100 jetons bleus dont la moitié sont gagnants et l'autre moitié perdants.
On ajoute 20 jetons rouges gagnants et n jetons rouges perdants (n étant un entier naturel non nul).
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer un jeton au hasard. Les jetons sont indiscernables au toucher.
On modélise l'expérience par la probabilité uniforme P.
On note A l'événement « Le jeton tiré est rouge » et B l'événement « Le jeton tiré est gagnant ».

Le but de l'exercice est de déterminer n tel que les événements A et B soient indépendants pour P c'est-à-dire tel que $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$.

Exprimer en fonction de n le nombre total de jetons dans le sac. ……….…… (une seule réponse, sans égalité)

Écrire dans l'espace vide ci-dessous les probabilités des événements A, B et $A \cap B$ en fonction de n.

En déduire la valeur de n cherchée.

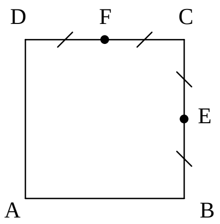
…….. (une seule valeur sans égalité)

IV. (4 points)

On considère un carré ABCD de côté a où a est un réel strictement positif (voir figure pour laquelle il est demandé de ne rien écrire dessus). On note E et F les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[CD]$.

Calculer les produits scalaires suivants en utilisant à chaque fois la méthode de projection orthogonale : $p_1 = \overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{BC}$; $p_2 = \overrightarrow{FD} \bullet \overrightarrow{FB}$; $p_3 = \overrightarrow{BF} \bullet \overrightarrow{DA}$; $p_4 = \overrightarrow{DE} \bullet \overrightarrow{CF}$.

Écrire les résultats (sous forme d'égalités) dans le tableau ci-dessous avec p_1 et p_2 sur la première ligne, p_3 et p_4 sur la deuxième ligne.



Détailler le calcul de l'un des produits scalaires au choix sur les lignes ci-dessous. Rédiger soigneusement en faisant attention aux notations.

………………..……………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………

V. (2 points)

Soit n un entier naturel quelconque.

• Compléter ci-contre l'identité valable pour tout réel x.

$$(x-1)\left(1+x+x^2+...+x^n\right) = ...$$

• À l'aide de cette identité, déterminer une expression simplifiée (en fonction de n) de la somme $S = 1+2+2^2+...+2^n$.

………………….……………..

VI. (1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 - 3u_n$ pour tout entier naturel n.

Compléter l'instruction manquante dans la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour tout entier naturel n, la liste de tous les termes de la suite jusqu'à u_n compris.

```
def liste(n):
    L=[-2]
    u=-2
    for i in range(1,n+1):

        ……………………………………

        L.append(u)
    return L
```

VII. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On se place dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) On donne les points $A(-1;3)$ et $B(2;5)$.

Compléter les égalités ci-dessous :

$AB^2 = ...$ $\qquad$ $OA^2 = ...$

Écrire ci-dessous une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par B et du cercle $\mathcal{C}'$ de centre O passant par A.

$\mathcal{C}$: ………………………………………………… $\mathcal{C}'$: …………………………………………………

2°) Déterminer la nature précise de la courbe Γ d'équation $(x-1)^2+(y+1)^2 = 169$.

………………..……………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 7-2-2020

I.

On lance deux dés tétraédriques (à 4 faces) bien équilibrés deux couleurs, l'un bleu, l'autre rouge, dont les faces sont numérotés 1, 2, 3, 4. On note les numéros des faces supérieures.

On considère l'équation du second degré $x^2+ax+b=0$ (E) d'inconnue réelle x où le coefficient a est donné par le dé bleu et le coefficient b par le dé rouge.
Le tableau ci-dessous donne la valeur du discriminant Δ de l'équation (E) en fonction des numéros des deux dés.

Dé bleu

Dé rouge	**1**	**2**	**3**	**4**
1	− 3	0	5	12
2	− 7	− 4	1	8
3	− 11	− 8	− 3	4
4	− 15	− 12	− 7	0

On donnera toutes les réponses sous forme décimale exacte.

1°) Quelle est la probabilité que (E) admette au moins deux racines dans $\mathbb{R}$?

0,3125 (une seule réponse sans égalité)

$$\begin{aligned} P\left(\text{« }(\mathrm{E})\text{ admet au moins 1 racine dans } \mathbb{R}\text{ »}\right) &= P(\text{« }\Delta \geqslant 0\text{ »}) \\ &= \frac{5}{16} \\ &= 0{,}3125 \end{aligned}$$

2°) Quelle est la probabilité que (E) admette exactement une racine dans $\mathbb{R}$?

0,125 (une seule réponse sans égalité)

$$\begin{aligned} P\left(\text{« }(\mathrm{E})\text{ admet exactement 1 racine dans } \mathbb{R}\text{ »}\right) &= P(\text{« }\Delta = 0\text{ »}) \\ &= \frac{2}{16} \\ &= \frac{1}{8} \\ &= 0{,}125 \end{aligned}$$

3°) Sachant que le numéro de la face supérieure du dé bleu est 3, quelle est la probabilité que (E) admette deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$?

0,5 (une seule réponse sans égalité)

Il s'agit d'une probabilité conditionnelle : probabilité de l'événement « (E) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ » sachant l'événement « Le numéro de la face supérieure du dé bleu est 3 ».

On obtient $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

4°) Sachant que le numéro de la face supérieure du dé rouge est impair, quelle est la probabilité que (E) n'admette aucune racine dans $\mathbb{R}$?

0,5 (une seule réponse sans égalité)

Il s'agit d'une probabilité conditionnelle.
On obtient $\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

5°) Sachant que (E) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, quelle est la probabilité que le numéro de la face supérieure du dé bleu soit 3 ?

0,4 (une seule réponse sans égalité)

Il s'agit d'une probabilité conditionnelle.
On utilise le tableau à double entrée.
Il y a 5 cas pour lesquels $\Delta > 0$, parmi lesquels 2 où le numéro de la face supérieure du dé bleu est 3.
On obtient $\dfrac{2}{5}$.

6°) Quelle est la probabilité que (E) admette – 1 pour racine ?

0,1875 (une seule réponse sans égalité)

On ne cherche pas à calculer les racines de (E).

On sait que (E) est l'équation $x^2+ax+b=0$.

Pour que – 1 soit racine de (E), il faut et il suffit que $(-1)^2+a\times(-1)+b=0$ (1) [on remplace x par – 1].

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 1-a+b=0 \\ &\Leftrightarrow a-b=1 \quad (1') \end{aligned}$$

On sait que les valeurs possibles de a et b sont 1, 2, 3, 4 donc les couples $(a\,;b)$ qui vérifient $(1')$ sont $(2\,;1)$, $(3\,;2)$, $(4\,;3)$.

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{3}{16}=0{,}1875$.

II.

On dispose de trois sacs S_1, S_2, S_3 contenant des jetons marqués chacun par une lettre. Le sac S_1 contient trois jetons marqués A, B, C. Le sac S_2 contient deux jetons marqués C et D. Le sac S_3 contient deux jetons marqués E et F. On tire au hasard dans l'ordre un jeton de S_1, puis un jeton de S_2 et enfin un jeton de S_3. On obtient alors un « mot » de trois lettres.

Répondre chaque fois par un seul résultat sous forme de fraction irréductible, sans égalité.

1°) Quelle est la probabilité d'obtenir un mot se finissant par E sachant qu'il commence par une consonne ?

$\frac{1}{2}$ (une seule réponse sans égalité)

Il y a 8 mots qui commencent par une consonne : BCE, BCF, BDE, BDF, CCE, CCF, CDE, CDF.
Parmi ces mots, il y en 4 qui se terminent par la lettre E.

La probabilité cherchée est donc $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

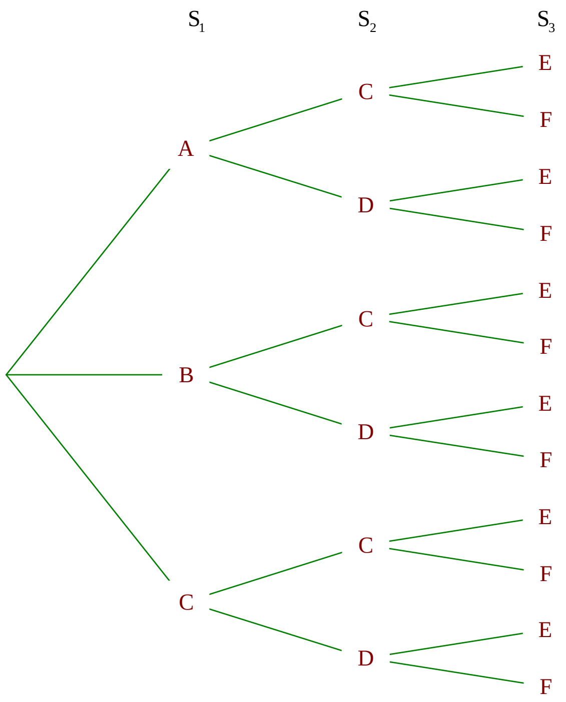
2°) Quelle est la probabilité d'obtenir un mot qui commence par une consonne sachant qu'il se finit par E ?

$\frac{2}{3}$ (une seule réponse sans égalité)

Il y a 6 mots qui se terminent par la lettre E. Parmi ces mots, il y en 4 qui commencent par une consonne.

La probabilité cherchée est donc $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Pour modéliser l'expérience aléatoire, on peut utiliser un arbre de possibilités.



III.

Dans un sac, on place 100 jetons bleus dont la moitié sont gagnants et l'autre moitié perdants.
On ajoute 20 jetons rouges gagnants et n jetons rouges perdants (n étant un entier naturel non nul).
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer un jeton au hasard. Les jetons sont indiscernables au toucher.
On modélise l'expérience par la probabilité uniforme P.
On note A l'événement « Le jeton tiré est rouge » et B l'événement « Le jeton tiré est gagnant ».

Le but de l'exercice est de déterminer n tel que les événements A et B soient indépendants pour P c'est-à-dire tel que $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$.

Exprimer en fonction de n le nombre total de jetons dans le sac. $120+n$ (une seule réponse, sans égalité)

Écrire dans l'espace vide ci-dessous les probabilités des événements A, B et $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ en fonction de n.

$P(\mathrm{A})=\frac{20+n}{120+n}$ $P(\mathrm{B})=\frac{70}{120+n}$ $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{20}{120+n}$

$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ est l'événement : « Le jeton tiré est rouge et gagnant ».

Il y a 20 jetons rouges et gagnants dans le sac.

En déduire la valeur de n cherchée.

20 (une seule valeur sans égalité)

On cherche n tel que $P(\text{A}\cap\text{B})=P(\text{A})\times P(\text{B})$ (1).

$$(1)\Leftrightarrow\frac{20+n}{120+n}\times\frac{7\cancel{0}}{\cancel{120+n}}=\frac{2\cancel{0}}{\cancel{120+n}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{20+n}{120+n}\times7=2$$

$$\Leftrightarrow 7(20+n)=2(120+n)$$

$$\Leftrightarrow 140+7n=240+2n$$

$$\Leftrightarrow 5n=100$$

$$\Leftrightarrow n=20$$

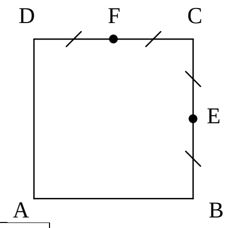
IV.

On considère un carré ABCD de côté a où a est un réel strictement positif (voir figure pour laquelle il est demandé de ne rien écrire dessus). On note E et F les milieux respectifs des segments $[\text{BC}]$ et $[\text{CD}]$.

Calculer les produits scalaires suivants en utilisant à chaque fois la méthode de projection orthogonale :

$p_1=\overrightarrow{\text{AE}}\bullet\overrightarrow{\text{BC}}$; $p_2=\overrightarrow{\text{FD}}\bullet\overrightarrow{\text{FB}}$; $p_3=\overrightarrow{\text{BF}}\bullet\overrightarrow{\text{DA}}$; $p_4=\overrightarrow{\text{DE}}\bullet\overrightarrow{\text{CF}}$.

Écrire les résultats (sous forme d'égalités) dans le tableau ci-dessous avec p_1 et p_2 sur la première ligne, p_3 et p_4 sur la deuxième ligne.



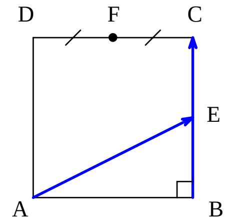
$p_1=\frac{a^2}{2}$	$p_2=-\frac{a^2}{4}$
$p_3=-\frac{a^2}{4}$	$p_4=-\frac{a^2}{2}$

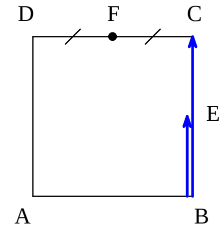
Détailler le calcul de l'un des produits scalaires au choix sur les lignes ci-dessous. Rédiger soigneusement en faisant attention aux notations.

Il est conseillé de faire une figure dans chaque cas.

On vérifie à chaque fois le signe du résultat en regardant la nature de l'angle géométrique saillant formé par les deux vecteurs.

• Calcul de p_1





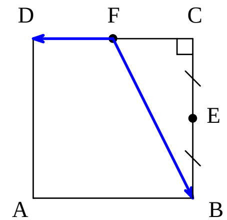
$p_1=\overrightarrow{\text{BE}}\bullet\overrightarrow{\text{BC}}$ car B est le projeté orthogonal de A sur (BC) (angle droit provenant de l'hypothèse « ABCD carré »)

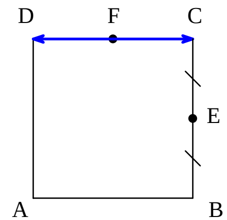
$=\text{BE}\times\text{BC}$ car les vecteurs $\overrightarrow{\text{BE}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$ sont colinéaires de même sens

$=\frac{a}{2}\times a$ (E est le milieu de $[\text{BC}]$)

$=\frac{a^2}{2}$

• Calcul de p_2





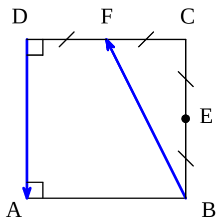
$p_2 = \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FC}$ car C est le projeté orthogonal de B sur (DC) (angle droit provenant de l'hypothèse « ABCD carré »)

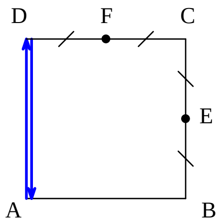
$= -FD \times FC$ car les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires de sens contraires

$= -\dfrac{a}{2} \times \dfrac{a}{2}$ (on utilise l'hypothèse « E est le milieu de $[BC]$ »)

$= -\dfrac{a^2}{4}$

• Calcul de p_3





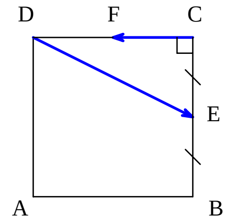
$p_3 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA}$ car A est le projeté orthogonal de B sur (AD) et D est le projeté orthogonal de F sur (AD) (angles droits provenant de l'hypothèse « ABCD carré »)

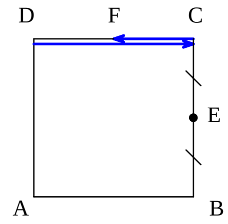
$= -AD \times AD$ car les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires de sens contraires

$= -\dfrac{a}{2} \times \dfrac{a}{2}$

$= -\dfrac{a^2}{4}$

• Calcul de p_4





$p_4 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CF}$ car C est le projeté orthogonal de E sur (BC) (angle droit provenant de l'hypothèse « ABCD carré »)

$= -DC \times CF$ car les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires de sens contraires

$= -a \times \dfrac{a}{2}$

$= -\dfrac{a^2}{2}$

V.

Soit n un entier naturel quelconque.

• Compléter ci-contre l'identité valable pour tout réel x.

$$(x-1)\left(1+x+x^2+...+x^n\right) = x^{n+1}-1$$

☐ On vérifie pour de petites valeurs de n (0, 1, 2, 3…).

• À l'aide de cette identité, déterminer une expression simplifiée (en fonction de n) de la somme $S = 1+2+2^2+...+2^n$.

$$S = 2^{n+1}-1$$

On remplace x par 2 dans l'égalité précédente.
On obtient alors $(2-1)\left(1+2+2^2+...+2^n\right) = 2^{n+1}-1$ soit $1 \times S = 2^{n+1}-1$ d'où le résultat.

☐ On vérifie pour de petites valeurs de n (0, 1, 2, 3…).

VI.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 - 3u_n$ pour tout entier naturel n.
Compléter l'instruction manquante dans la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour tout entier naturel n, la liste de tous les termes de la suite jusqu'à u_n compris.

```
def liste(n):
    L=[-2]
    u=-2
    for i in range(1,n+1):

        ......................................

        L.append(u)
    return L
```

```
def liste(n):
    L=[-2]
    u=-2
    for i in range(1,n+1):
        u=1-3*u
        L.append(u)
    return L
```

La suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique (à cause de la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 - 3u_n$) mais on s'en fiche pour écrire le programme.
On écrit l'instruction d'affectation « `u=1-3*u` » à partir de l'égalité « $u_{n+1} = 1 - 3u_n$ » (relation de récurrence).
On peut dire « $\text{nouveau u} = 1 - 3 \times \text{ancien u}$ ». À chaque calcul, on reprend le « u d'avant ».

Le – 2 ne sert pas. Il intervient dans les instructions « `L=[-2]` » et « `u=-2` ».

VII.

On se place dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) On donne les points $\text{A}(-1\,;3)$ et $\text{B}(2\,;5)$.
Compléter les égalités ci-dessous :

$\text{AB}^2 = 13$ $\qquad\qquad$ $\text{OA}^2 = 10$

Calcul de AB^2 :

$\text{AB}^2 = (x_\text{B} - x_\text{A})^2 + (y_\text{B} - y_\text{A})^2$ (formule du carré de la distance entre deux points dans le plan muni d'un repère orthonormé)

$= (2-(-1))^2 + (5-3)^2$

$= 3^2 + 2^2$

$= 13$

Autre méthode :

Le carré de la distance AB est égal à la somme des carrés des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$.

On calcule d'abord les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$.

$\overrightarrow{\text{AB}}(3\,;2)$ donc $\text{AB}^2 = 3^2 + 2^2 = 13$.

Calcul de OA^2 :

Comme O est l'origine du repère, on peut directement utiliser la formule du carré de la distance d'un point à l'origine du repère (« Le carré de la distance d'un point à l'origine du repère est égal à la somme des carrés des coordonnées »).

$$\text{OA}^2 = {x_\text{A}}^2 + {y_\text{A}}^2 = 10$$

☐ On vérifie graphiquement (il faut donc faire un graphique).

Écrire ci-dessous une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par B et du cercle $\mathcal{C}'$ de centre O passant par A.

$\mathcal{C} : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$ .... $\mathcal{C}' : x^2 + y^2 = 10$

On applique directement la formule donnant une équation du cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon R :
$(x-a)^2 + (x-b)^2 = R^2$ [ou $\sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2} = R$].

2°) Déterminer la nature précise de la courbe Γ d'équation $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 169$.

Γ est $\boxed{\text{le}}$ cercle de centre $\Omega(1\,;-1)$ et de rayon 13.

On reconnaît une équation de la forme $(x-a)^2 + (x-b)^2 = R^2$ avec $a = 1$, $b = -1$, $R = 13$.