TS1 spécialité

Devoir pour le lundi 24 février 2020

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{Z}$ par $f(n)=\frac{n}{3}$ si n est divisible par 3 et $f(n)=3-n$ si n n'est pas divisible par 3.

On notera que f est une fonction définie par deux expressions différentes selon que n est divisible par 3 et l'on observera que f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=a$ où a est un entier relatif fixé et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1°) Réaliser un programme en Python sous forme de deux « blocs » : un bloc qui définit la fonction f et un bloc qui définit une fonction ayant pour arguments a et n qui renvoie la liste des termes de la suite d'indices inférieurs ou égaux à n [on pourra la noter `liste_termes(a,n)`].
Écrire le programme Python sur la copie.
Observer le comportement de la suite (u_n) pour plusieurs valeurs de a (par exemple, 0, 1, 2, 3, – 1, – 2, – 3, 9, – 9, 23, 54…). Regarder en particulier les valeurs de a suivantes : 2019, 2020, – 2019, – 2020.

2°) Le but de cette question est de démontrer une propriété de la fonction f qui sera utilisée dans l'étude de la suite (u_n).
Démontrer que si n est un entier relatif non divisible par 3, alors $3-n$ n'est pas divisible par 3.
On pourra raisonner par contraposée.

En déduire $(f\circ f)(n)$ lorsque n est un entier relatif non divisible par 3.

3°) On va étudier la suite (u_n) selon les valeurs de a.

● On suppose que $a\neq 0$.
On admet que a peut s'écrire de manière unique sous la forme $3^p\times q$ où p est un entier naturel et q est un entier relatif non divisible par 3 (voir démonstration ci-dessous).
Calculer u_1, u_2, …, u_p, u_{p+1}, u_{p+2}. On pourra donner les résultats sans justifier.
Que peut-on dire de la suite (u_n) à partir de l'indice p ? Justifier brièvement.

● On suppose que $a=0$.
Que peut-on dire de la suite (u_n) dans ce cas ?

On veut démontrer que tout entier relatif a non nul peut s'écrire de manière unique sous la forme $3^p \times q$ où p est un entier naturel et q est un entier relatif non divisible par 3 (voir démonstration ci-dessous).

Existence :

On note E l'ensemble des entiers naturels tels que 3^p divise a.
L'ensemble E est non vide puisque 0 appartient à E de manière évidente.
Il admet donc un plus grand élément que l'on note p.

On peut donc écrire $a = 3^p \times q$ où q est un entier relatif.
q n'est pas divisible par 3. En effet, s'il l'était on pourrait écrire $a = 3^{p+1} \times q'$ avec q' entier relatif et donc p ne serait pas le plus grand entier naturel tel que 3^p divise a.
On a donc démontré que a peut s'écrire sous la forme $3^p \times q$ avec p entier naturel et q entier relatif non divisible par 3.

Unicité :

On suppose que a puisse s'écrire sous la forme $3^p \times q$ et $3^{p'} \times q'$ avec p et p' entiers naturels et q et q' entiers relatifs non divisibles par 3. On suppose de plus que $p \geqslant p'$.

On a $a = 3^p \times q$ et $a = 3^{p'} \times q'$ donc $3^p \times q = 3^{p'} \times q'$ (1).

(1) donne donc $3^{p-p'} \times q = q'$ $(1')$.

D'après $(1')$, si p était strictement supérieur à p', alors q' serait divisible par 3 ce qui n'est pas possible.
On en déduit que $p = p'$.

(1) [ou $(1')$] donne alors immédiatement $q = q'$ ce qui prouve l'unicité.

Corrigé du devoir pour le 24-2-2020

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{3} \text{ si } 3\mid n\\ 3-n \text{ si } 3\nmid n\end{cases}$$

1°)

```python
def f(x):
    if x%3==0:
       y=x/3
    else:
       y=3-x
    return y

def liste_termes(a,n):
    u=a
    L=[u]
    for i in range(n+1):
        u=f(u)
        L.append(u)
    return L
```

2°)

1ère méthode :

On raisonne par contraposée.
On utilise les congruences.

Rappels :

Définition :
La contraposée de l'implication « A $\Rightarrow$ B » est l'implication « non B $\Rightarrow$ non A ».

Propriété (fondamentale) :

Lorsqu'une implication est vraie, sa contraposée l'est également.

Soit n un entier relatif.

On suppose que $3-n$ est divisible par 3.

On a alors $3-n\equiv 0$ (mod. 3).

On peut en déduire que $n\equiv 3$ (mod. 3) qui entraîne immédiatement $n\equiv 0$ (mod. 3).

Ainsi, n est divisible par 3.

Par contraposée, on en déduit que si n est un entier relatif non divisible par 3, alors $3-n$ n'est pas divisible par 3.

2^e^ méthode :

On raisonne par contraposée.
On n'utilise pas les congruences.

Soit n un entier relatif.

On suppose que $3-n$ est divisible par 3.

On a : $n=3-(3-n)$.
Comme 3 et $3-n$ sont divisibles par 3, par propriété des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs, on peut dire que n est divisible par 3.

Par contraposée, on en déduit que si n est un entier relatif non divisible par 3, alors $3-n$ n'est pas divisible par 3.

3^e^ méthode :

On utilise un tableau de congruences.

$n \equiv \ldots$ (mod. 3)	0	1	2
$3-n \equiv \ldots$ (mod. 3)	0	2	1

n n'est pas divisible par 3 $\Leftrightarrow$ n est congru à 1 ou 2 modulo 3.

On observe dans le tableau, que dans ces deux cas, $3-n$ n'est pas divisible par 3.

Remarque : On peut même aller plus loin dans la réponse.
D'après ce tableau, on a l'équivalence « n est divisible par 3 » $\Leftrightarrow$ « $3-n$ divisible par 3 ».

En déduire $(f \circ f)(n)$ lorsque n est un entier relatif non divisible par 3.

$$
\begin{aligned}
(f \circ f)(n) &= f\left[f(n)\right] \\
&= f(3-n)
\end{aligned}
$$

Or d'après le résultat établi précédemment, $3-n$ n'est pas divisible par 3.

Donc $(f \circ f)(n) = 3-(3-n) = n$.

3°) On va étudier la suite (u_n) selon les valeurs de a.

● On suppose que $a \neq 0$. $a = 3^p \times q$ où p est un entier naturel et q est un entier relatif non divisible par 3.

$$u_1 = f(u_0) = \frac{3^p q}{3} = 3^{p-1} q$$

$$u_2 = f(u_1) = 3^{p-2} q$$

$$\vdots$$

$$u_p = q$$

$$u_{p+1} = 3 - q$$

$$u_{p+2} = q$$

La suite (u_n) est périodique de période 2 à partir de l'indice p.

● On suppose que $a = 0$.
Dans ce cas, la suite (u_n) est constante : tous les termes sont égaux à 0.
On démontre le résultat par récurrence.